Investigações em Ensino de Ciências – V18(3), pp. 581-600, 2013

A SOLUÇÃO ATRIBUÍDA A D'ALEMBERT SOBRE A 'VERDADEIRA FORÇA' É CAPAZ DE DIRIMIR A POLÊMICA ENSEJADA PELA CRÍTICA DE LEIBNIZ A DESCARTES?[1]

(Is the solution given by d'Alembert about the 'true force' able to settle, in a satisfactory way, the Leibniz's criticism against Descartes?)

Carlos Erymá da Silva Oliveira [carloseryma@yahoo.com.br]
Elton Casado Fireman [eltonfireman@yahoo.com.br]
Jenner Barretto Bastos Filho [jenner@fis.ufal.br]
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas (PPGECIM/UFAL) Rua Aristeu de Andrade, 452 – Farol – Maceió – Alagoas, CEP 57051-090

Resumo

Argumentamos que a crítica de Leibniz à Física de Descartes não pode ser respondida satisfatoriamente pela solução de d'Alembert de 1758. Este trabalho, constitui-se também em uma sistematização teórica aprofundada que servirá de base para a formulação, em uma instância ulterior, de uma intervenção muito mais didática e interativa em sala de aula no ensino médio e nos primeiros anos do ensino superior.
Palavras-chave: quantidade de movimento; vis viva; causa; causa-efeito; leis de conservação; força newtoniana.

Abstract

We argue that Leibniz's criticism against the Cartesian physics cannot be sufficiently answered by the solution offered by d'Alembert in 1758. The present essay constitutes also a theoretical and deep systematization consisting of a basis in order to formulate an intervention in classrooms in High Schools and in the first years of university teaching.
Keywords: quantity of motion; vis viva; cause; cause-effect; conservation laws; Newtonian force.

Introdução

O objetivo do presente trabalho é sistematizar com novas luzes a discussão do problema da crítica de Leibniz a Descartes acerca do importante problema da grandeza responsável pelos movimentos, bem como da pressuposta solução oferecida por d'Alembert dantes celebrada como definitiva, mas nas últimas décadas rejeitada como impregnada de mal-entendidos os quais, ironicamente, ela pretendia sepultar. Queremos dar a nossa versão de como o viés positivista e instrumental da solução de d'Alembert constitui-se em algo insuficiente e inadequado para oferecer minimamente uma resposta à altura dos sutis e profundos argumentos de Leibniz. Não teremos meias palavras para asseverar, com argumentos além daqueles de Laudan (1968), de Iltis (1970), de Shimony (2010), entre outros, que a pressuposta solução de d'Alembert é um mito.

Em linha de continuidade ao objetivo declarado no parágrafo acima, pretendemos neste trabalho, e como uma primeira instância, sistematizar o conjunto de referenciais teóricos dos quais lançaremos mão para construir, no contexto de uma dissertação de mestrado de caráter profissional, um *produto*, ou se quisermos, um *trabalho didático de intervenção*, bem mais simplificado o qual temos a intenção de levar para as salas de aula do ensino médio, bem como para as salas de aula dos

[1] Versão substancialmente ampliada de um trabalho preliminar intitulado *Controvérsia acerca de uma pressuposta solução de d'Alembert*, apresentado no XIV Encontro de Pesquisa em Ensino de Física da Sociedade Brasileira de Física (SBF), Maresias - SP- Brasil de 05 a 09 de novembro de 2012 e publicado nas Atas do XIV EPEF.
Ver http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/xiv/sys/resumos/T0340-2.pdf

primeiros anos do ensino superior. O mencionado trabalho conterá um *guia para o professor* que, não obstante claro e conciso, não dispensará deste a necessidade do exercício da reflexão.

O teor aqui discutido diz respeito a conceitos que devem ser dominados por um professor de Física e de sua apropriação a partir de estudos de História e de Filosofia da Ciência. O trabalho aqui não contém a exposição de referenciais próprios para a construção do *produto* que será levado à sala de aula sobre o assunto, tarefa que legaremos para uma segunda instância.

Sobre a crítica de Leibniz a Descartes, uma brevíssima colocação do problema pode ser assim articulada: Descartes parte da premissa de que Deus ao criar o mundo colocou neste uma dada quantidade de movimento e que esta se conserva, pois do contrário Deus revelaria a sua Imperfeição, a sua Mutabilidade e a sua Inconstância, o que seria absurdo. Como Deus é um ser Perfeitíssimo, Imutável e Constante, então a quantidade de movimento total (somatório dos produtos das extensões de cada corpo pelas suas respectivas velocidades escalares) constitui a *força móvel*[2], responsável (causadora) por todos os movimentos no mundo. Leibniz, por seu turno, argumentou que a quantidade responsável (causadora) por tais movimentos é a sua *vis viva* que é proporcional ao quadrado da velocidade e isso é respaldado pelo princípio metafísico da identidade entre causa e efeito. Ambos os Programas científico-filosóficos são circunscritos a princípios causais e leis de conservação. À luz do conceito de Lakatos de Programas de Pesquisa Científica (Lakatos, 1979) podemos asseverar que ambos os Programas -Cartesiano e Leibniziano- contém princípios causais e leis de conservação como elementos constituintes de seus respectivos núcleos duros[3].

Este ensaio apresenta-se organizado da seguinte maneira: Na seção 2 exporemos o que se convencionou chamar de solução de d'Alembert; na seção 3 procederemos a um interlúdio para aclarar conceitos; neste momento é necessário ter em mente que os conceitos com os quais trabalhamos hoje em dia diferem em aspectos relevantes dos conceitos com os quais pensadores seminais trabalharam em séculos anteriores e é necessário levar em conta essa situação; no entanto, nada impede que um professor ao proceder a sua reconstrução, faça uma transposição conscienciosa e judiciosa desses conceitos, tendo em mente, na medida do possível, essa diferença fundamental; na seção 4 discutiremos a crítica de Leibniz a Descartes de uma maneira tal a ressaltar o teor metafísico da mesma; na seção 5 discutimos o princípio tão caro a Leibniz que constitui a identidade entre causa e efeito; as eventuais dificuldades de um princípio que pretende ter validade geral são trazidas à baila na seção 6; a seção 7 mostra, com um exemplo muito simples e convincente, a diferença radical entre os estatutos carregados pelos conceitos respectivamente de momentum linear e de vis viva; esta diferença não dá conforto à pretensa solução de d'Alembert pois a sua argumentação não responde à pergunta de Leibniz; na seção 8 mostramos um Leibniz tributário da tradição de Galileu e de Huygens; na seção 9 dizemos **não** à solução de d'Alembert enquanto resposta à pergunta de Leibniz; na seção 10 exibimos as nossas conclusões.

O que atribuem a d'Alembert

Como é conhecido, d'Alembert mostrou que: (1) a eficácia da força newtoniana agindo no tempo sobre um dado corpo de massa **m** constante leva à variação da quantidade de movimento linear experimentada por este, ou, se quisermos, leva à variação do momento linear experimentado

[2] A força móvel cartesiana não é, evidentemente, a força newtoniana e sim a sua quantidade de movimento.

[3] Segundo Lakatos, um Programa de Pesquisa Científica é composto por um *núcleo duro* e um *cinturão protetor*. O *núcleo duro* é a parte considerada inegociável, por decisão dos aderentes do Programa, e o *cinturão protetor* é a parte flexível e negociável do Programa. Na referência (Bastos Filho, 1999) o conceito de programas de pesquisa cientifica é estudado com detalhes nos casos de Descartes, Leibniz, Newton, Einstein e Bohr. Como não é o foco do presente trabalho, remetemos o leitor a essa referência.

pelo corpo em questão; (2) a eficácia da força newtoniana agindo no espaço sobre um dado corpo de massa **m** constante leva à variação da energia cinética experimentada por este.

Matematicamente, isso pode ser mostrado em breves linhas. Tendo em vista que força newtoniana é a derivada primeira do momento linear em relação ao tempo, F = (dp/dt)= d(mv)/dt, então segue de sua integração no tempo que,

$$\int \mathbf{F\ dt} = \int \mathbf{[d(mv)/dt]\ dt} = \int \mathbf{d(mv)} = \mathbf{(mv_f - mv_i)} = \Delta \mathbf{p}$$

De maneira análoga, a partir da integração da força newtoniana no espaço segue que,

$$\int \mathbf{F\ dx} = \int \mathbf{[d(mv)/dt]dx} = \int \mathbf{m(dx/dt)\ dv} = \int \mathbf{mv\ dv} = \mathbf{[m(v_f)^2/2 - m(v_i)^2/2]} = \Delta \mathbf{E_{Cinética}}$$

Nas expressões acima os subscritos i e f se referem respectivamente a inicial e a final.

Como se sabe, a física, tal como é praticada nos dias de hoje, incorpora os conceitos de força newtoniana, de momento linear e de energia cinética, todos eles considerados como muito relevantes. As expressões dispostas conectam de maneira direta a força newtoniana aos conceitos de momento linear e de energia cinética. De maneira alternativa, pode-se dizer que a eficácia da força newtoniana pode ser medida tanto pela sua ação no espaço quanto pela sua ação no tempo. Não obstante ser correto afirmar que as eficácias das respectivas ações da força newtoniana no tempo e no espaço sejam válidas, isso não significa dizer que tais ações sejam as mesmas nem tampouco afirmar que isso resolve e dirime a crítica leibniziana a Descartes.

Efetivamente, hoje em dia, tendo em vista o instrumental importante da análise dimensional, um estudante pode imediatamente constatar que as grandezas aludidas acima não são definitivamente as mesmas nem são equivalentes. Isto pode ser concluído muito facilmente: a integração da força newtoniana no tempo leva à variação do momento linear experimentado pelo corpo enquanto a integração da força newtoniana no espaço leva à variação da energia cinética: essas duas importantes grandezas têm, evidentemente, dimensões físicas distintas, a saber, respectivamente $\mathbf{MLT^{-1}}$ e $\mathbf{ML^2 T^{-2}}$ onde **L** denota dimensão de comprimento, **T** de tempo e **M** de massa.

Embora a força newtoniana seja capaz de conectar os conceitos de momento linear e de energia cinética, a questão de Leibniz não diz respeito à força newtoniana e sim a um outro tipo de força qualitativa e quantitativamente diferente que é a assim chamada *vis viva* e esta se refere a algo que não é respondido satisfatoriamente na abordagem conhecida como sendo de d'Alembert.

Para contestar os argumentos de d'Alembert tomemos o que ele escreveu no *Discurso Preliminar* da 2ª edição de 1758 de seu *Tratado de Dinâmica*. Deixemo-lo falar:

> Ora esses diferentes efeitos são evidentemente produzidos por uma mesma causa; tanto daqueles cuja força seja avaliada pela velocidade, quanto daqueles cuja força seja avaliada pelo quadrado da velocidade, e não se pode entender e falar de efeito quando eles são expressos pela força. Esta diversidade de efeitos proveniente, toda ela, de uma mesma causa, pode servir, para se dizer de passagem, o quão pouco tem de justeza & precisão o axioma pretendido, se for colocado em uso a proporcionalidade entre as causas e seus efeitos. Enfim, aqueles mesmos que não estejam no estado de recorrer aos princípios metafísicos da questão das forças vivas verão facilmente que isto não passa de uma disputa de palavras, caso as duas partes em questão estejam inteiramente de acordo sobre os princípios fundamentais do equlíbrio e do movimento. (d'Alembert, J. R. 1758, Discurso Preliminar do *Traité de Dynamique*, p.xxiii; tradução para o português de nossa responsabilidade a partir do original em francês[4]).

[4] "Or ces differens effets sont évidemment produits par une même cause; donc ceux qui ont dit que la force étoit tantôt comme la vitesse, tantôt comme son quarré n'ont pu entendre parler que de l'effet, quand ils se sont exprimés de la force. Cette diversité d'effets provenans tous d'une même cause, peut servir, pour le dire en passant, à faire voir le peu de justesse & de précision de l'axiome prétendu, si souvent mis en usage, fur la proprortionalité des causes à leurs

Há um erro central e de natureza filosófica na argumentação de d'Alembert. O fato das grandezas quantidade de movimento e *vis viva* admitirem ser expressas em termos newtonianos, não dispensa de forma alguma a importância dos princípios metafísicos. Tanto é que a *conservação da energia* tal como foi formulada em meados do século XIX não tem o mesmo estatuto nem da força newtoniana, nem da quantidade de movimento. Nas seções 7, 8 e 9 deste artigo apresentaremos uma série de argumentos que consubstanciarão os nossos pontos de vista e na seção 10 fecharemos as nossas conclusões. Como um dos pontos que aqui adiantaremos, mostramos na seção 7 que exatamente a mesma força newtoniana pode produzir efeitos enormemente diferentes, o que mostra -diferentemente do que asseverou d'Alembert- que a força newtoniana não é a causa para responder a crítica sutil de Leibniz à física de Descartes. Temos a intenção de mostrar isso, bem como vários outros argumentos neste artigo.

Interlúdio para aclarar conceitos

Os conceitos básicos intervenientes neste trabalho deverão ser aclarados.

[1] É necessário que tenhamos em mente que o conceito original de quantidade de movimento de Descartes tal como se encontra, por exemplo, no seu livro *Les Principes de la Philosophie* de 1644 não é o mesmo do que hoje é conhecido nos livros didáticos como momento linear. Há duas diferenças importantes: (i) Descartes define quantidade de movimento[5],[6] como o produto da *extensão* (ver Fig. 1) do corpo, isto é o seu volume, pela sua velocidade escalar (ver Jammer[7], 1970; Schönberg[8], 1985; Bastos Filho, 1986; 1987); se nos utilizarmos da moderna análise dimensional, podemos dizer que a dimensão da quantidade de movimento cartesiana, e diferentemente da correspondente dimensão do moderno conceito de momento linear, é $L^3\ L\ T^{-1} = L^4 T^{-1}$; a dimensão física do moderno conceito de momento linear é $M\ L\ T^{-1}$; (2) uma segunda diferença importante é que o conceito cartesiano de velocidade se refere a uma grandeza escalar e não ao moderno conceito de velocidade enquanto grandeza vetorial; portanto, o moderno conceito de momento linear é uma grandeza vetorial, diferentemente do conceito cartesiano de quantidade de movimento.

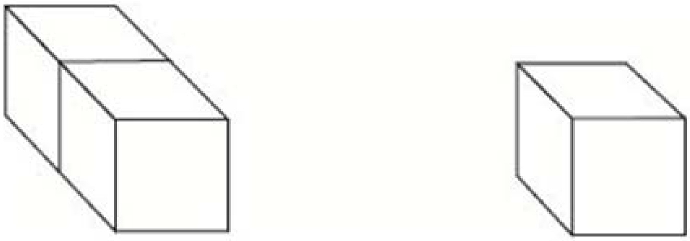


FIG. 1: O conceito original de quantidade de movimento de Descartes não envolve o que hoje concebemos por massa. Um corpo com extensão igual a **2 Volumes** com uma velocidade **v/2** tem uma mesma quantidade de movimento que um corpo da extensão igual a **1 Volume** e velocidade **v**. Outrossim, a velocidade cartesiana é escalar e não vetorial.

effets. Enfin ceux mêmes qui ne seroient pas un état de remonter jusqu'aux Principes Métaphysique de la question des forces vives, verront aisément qu'elle n'est q'une dispute de mots, s'ils confiderent que les partis sont d'ailleurs entiérement d'accord sur les principes fondamentaux de l'équilibre & mouvement. (d'Alembert, Traité de Dynamique (Discours Preliminaire), 1758, p. xxiii).

5 "C'est pourquois, lorsqu'une partie de la matière se meut deux fois plus vite qu'une autre, et que **cette autre est deux fois plus grande que la première**, nous devons penser qu'il y a tout autant de mouvement **dans la plus petite que dans la plus grande**; et que toutes fois et quantes que le mouvement d'une partie diminue, celui de quelque autre augmente à proportion". (Descartes, 1952, p. 632; os caracteres em negrito foram por nós acrescentados para efeito de realce)

6 A tradução para o português do excerto da nota acima é o seguinte: "Isto porque, quando uma parte da matéria se move duas vezes mais velozmente que outra, e que **esta outra é duas vezes maior que a primeira**, nós devemos pensar que há tanto movimento **na menor que na maior**; e todas quantas forem as vezes que o movimento de uma parte diminui, o de outra aumenta na mesma proporção". (Descartes, tradução para o português do excerto da nota precedente; caracteres em negritos foram acrescentados por nós).

7 Jammer, 1970, p. 99

8 Schönberg, 1985, p.45 e p. 51

[2] Embora se reconheça de maneira consensual que o conceito de Descartes é o de *extensão* e que atribuir massa no sentido newtoniano a Descartes se constitui numa forma de anacronismo[9], tal procedimento contudo, torna-se aceitável no contexto de uma reconstrução racional cujo objetivo precípuo é aquele do ensino das teorias à luz do conhecimento hodierno. Tudo isso, evidentemente, deve ser feito de maneira judiciosa e com atenção e, deste modo, as devidas ressalvas ao desenvolvimento histórico devem ser contempladas na discussão, tanto quanto possível. Isso se dá porque o mister do professor de Física não é exatamente igual ao do historiador nem ao do filósofo da ciência. De fato, o professor de Física deve extrair as lições que considera relevantes a partir do estudo atento dos trabalhos de historiadores e de filósofos, mas deve fazê-lo a seu modo, com autonomia, tendo em vista a melhoria do ensino de sua disciplina. No que concerne ao conceito correspondente de Leibniz, façamos as considerações a seguir. Tomemos a figura exibida no capítulo 17 de seu *Discurso de Metafísica* de 1686 (ver Fig. 2)[10] intitulado: *Exemplo de uma máxima subalterna ou lei da natureza. Donde se mostra que Deus conserva sempre a mesma força, mas não a mesma quantidade de movimento, contra o que dizem os cartesianos e muitas outras pessoas*.

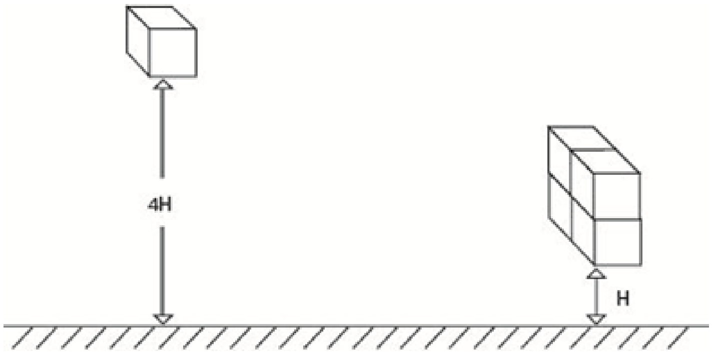


FIG. 2: Um corpo de extensão simples elevado a uma altura **4H** e um corpo de extensão quádrupla elevado a um altura **H**.

Nesta figura, o corpo de 4 libras é quatro vezes mais extenso que o corpo de uma libra, o que leva à inferência segundo a qual em um primeiro momento Leibniz, em que pese a crítica a Descartes, houvera adotado o conceito cartesiano de *extensão*. No entanto, a questão segundo a qual Leibniz houvera ou não engendrado - no corpo de seu pensamento - um conceito de massa constitui-se em algo não consensual entre os historiadores e outros estudiosos. Couturat[11],[12] (1903), por exemplo, argumentou que a invenção do conceito de massa permitiu a Leibniz "dissociar completamente a idéia de matéria da idéia de extensão". Mach[13],[14] (1921) por seu turno argumentou que o conceito de massa de Leibniz era praticamente o de Descartes e que somente depois de 1695 é

[9] Por anacronismo podemos entender como o procedimento de interpretar feitos históricos de uma dada época à luz de conceitos e teorias que foram engendrados em épocas posteriores.

[10] Uma figura semelhante se encontra no capítulo 17 do *Discurso de Metafísica* de Leibniz. A figura acima, contudo, é dos autores. As demais figuras deste artigo também são dos autores.

[11] L'invention du concept du masse ne constituait pas seulement un progrés capital de la mécanique: elle permettait à Leibniz de dissocier complètement l'idée de matiére de l'idée d'etendue, puisque le coefficient appelé masse est une quantité numérique, et non une grandeur spatiale (Couturat, 1903 *apud* Jammer, 1997, p.76).

[12] Tradução para o português da nota precedente: "A invenção do conceito de massa não constitui apenas um progresso capital da mecânica: ela permite a Leibniz dissociar completamente a ideia da matéria da ideia de extensão, pois o coeficiente chamado massa é uma quantidade numérica e não uma grandeza espacial".

[13] "Einen eigentlichen Massenbegriff hat Leibniz so wenig als Descartes; er spricht vom Körper (corpus), von der Last (moles), von ungleich grossen Körpern desselben spezifischen Gewichtes usw. Nur in der zweiten Abhandlung (1695) kommt einmal der Ausdruck 'massa' vor, welcher wahrscheinlich Newton entlehnt ist" (Mach, 1921 *apud* Jammer, 1997, p. 76)

[14] Tradução para o português da nota precedente: "Um conceito de massa de Leibniz realmente, ia muito pouco além do de Descartes. Ele fala de corpo (corpus), de cargas (moles), de corpos de tamanhos desiguais, de mesmos pesos específicos etc. Somente no segundo ensaio (1695) utiliza a expressão 'massa' provavelmente emprestada de Newton"

que ele houvera usado a expressão "massa" provavelmente tomada de Newton. Jammer (1997) discorda quando à data de 1695 atribuída por Mach e argumenta que já por ocasião da visita de Leibniz a Roma este se tornara, no que dizia respeito ao conceito de massa, cada vez mais newtoniano, em que pese a sua profunda divergência com o sistema de Newton. Foi lá, que por meio da *Acta Eruditorum*, Leibniz teve a primeira informação sobre os *Principia* de Newton; foi também em Roma que ele começou a escrever o seu *Dynamica de potentia et legibus natura corporea* de 1689. Remetendo o leitor às próximas notas de rodapé podemos constatar o quanto neste livro o conceito de Leibniz[15],[16],[17] se assemelha com o de Newton[18] (ver Fig. 3).

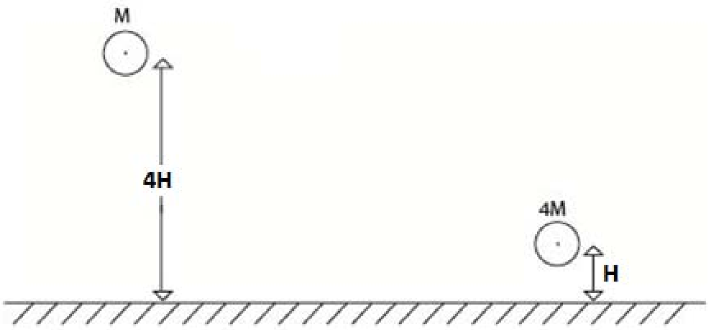


FIG. 3: Um corpo de massa **M** é elevado a uma altura **4H** e um corpo de massa **4M** elevado a uma altura **H**. Repare que os corpos têm iguais extensões porém diferentes massas. Isso significa que o de massa **4M** tem a densidade quádrupla do que o corpo de massa **M**.

Smith (2006), por seu turno, assegura que na controvérsia de Leibniz com os cartesianos o conceito moderno de massa não se fez presente até o século XVIII. Newton, efetivamente, já na primeira definição dos *Principia* publicados em 1687 usa o termo *massa* na acepção de *quantidade de matéria*, mas antes disso o próprio Newton havia usado a palavra latina *pondus* que tem o significado em inglês de "heaviness". Também, é necessário afirmar que, o estabelecimento da proporcionalidade entre *massa* e *peso* decorreu, segundo Newton[19] de experimentos muito precisos realizados com pêndulos. No entanto, no parecer de Smith, é asseverado que no contexto da controvérsia de Leibniz com os cartesianos a palavra standard em latim era *moles* que traduzida para o inglês assume o termo "bulk" e desde modo a quantidade de movimento era o produto de "bulk" pela velocidade, enquanto para a *vis viva* era o produto de "bulk" pelo quadrado da velocidade. Hoje em dia, o conceito newtoniano de massa, tal como é utilizado nos livros de texto, é dotado de um grau de abstração muito maior. Ele supera inteiramente o conceito de massa enquanto mera extensão. As massas dos corpos extensos podem ser consideradas como uma propriedade de seus respectivos centros de massa: trata-se do conceito *de massa pontual* [20] ,[21] (ver Fig. 4). Para um

[15] "Moles mobilium, vel ipsa mobilia, sunt in ratione composita voluminum et densitatem, seu extensionum et intensionum materiae" (Leibniz, '*Dynamica de potentia et legibus natura corporea' apud* Jammer, 1997, p. 79, nota de rodapé 16).

[16] Na tradução para o inglês:"The masses of mobile bodies are to each other as their volumes and densities, or as the extension and intension of matter" (Leibniz, *apud* Jammer 1997, p.79).

[17] Na tradução para o português: "As massas dos corpos móveis estão em relação aos seus respectivos volumes e densidades, ou em relação à extensão e à intensidade da matéria". Repare que os termos *volume* e *extensão* se acordam de maneira análoga àquela concordância entre os termos *densidade* e *intensidade*. Optamos pela expressão *intensidade*, pois a palavra *intensão*, embora existente em língua portuguesa pode ser confundida com *intenção*, cujo significado é completamente diferente.

[18] "A quantidade de matéria é a medida da mesma, obtida conjuntamente a partir de sua densidade e volume" (Newton, *Principia*, Definição I, 1990, p. 1; originalmente publicado em latim em 1687).

[19] "[...] É esta quantidade que doravante sempre denominarei pelo nome de corpo ou massa. A qual é conhecida através do peso de cada corpo, pois é proporcional ao peso, como encontrei em experimentos com pêndulos, realizados muito rigorosamente, os quais serão mostrados mais adiante." (Newton, *Principia* Definição I, 1990, p. 1; originalmente publicado em latim em 1687).

[20] "The Newtonian concept of 'mass-point', still used in present-day textbooks, marks the chasm that separates Newton's concept of mass from Descartes' concept of spatial extension" (Jammer, 1970, p. 99).

aprofundamento acerca das diferenças entre o sistema de Newton e o sistema de Descartes, ver Bastos Filho & Xavier de Araújo, 1989.

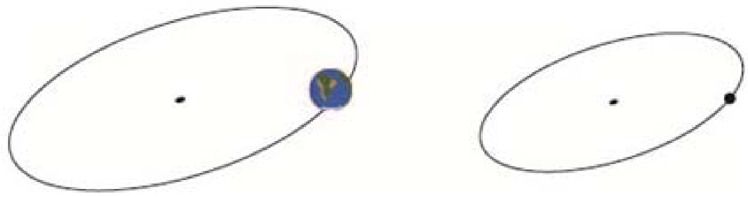


FIG. 4: Um corpo extenso como a Terra pode ser tratado como uma massa pontual. A massa extensa passa a ser propriedade de um ponto que é o seu centro de massa.

[3] É necessário distinguir a força enquanto quantidade de movimento de Descartes, da força enquanto *vis viva* de Leibniz, além de distinguir as duas anteriores da força de Newton. A análise dimensional constitui um guia bastante esclarecedor: como vimos, se interpretarmos a massa cartesiana como *extensão* e não com o que conhecemos como massa newtoniana, então a dimensão física da quantidade de movimento de Descartes é $\mathbf{L^3 (L\,T^{-1}) = L^4 T^{-1}}$. Neste trabalho, tomaremos o conceito de quantidade de movimento moderno, ou seja, o conceito de momento linear moderno como sendo o produto da massa do corpo pela sua velocidade vetorial; desde modo, o momento linear tem dimensão $\mathbf{M\,L\,T^{-1}}$; também, se interpretarmos a *vis viva* já incorporado o conceito de massa newtoniana, então teremos a dimensão $\mathbf{M\,L^2\,T^{-2}}$ que é a mesma dimensão da energia. *Toda a nossa discussão pressuporá que momento linear tem a dimensão* $\boldsymbol{MLT^{-1}}$ *e a vis viva tem a dimensão* $\boldsymbol{M\,L^2\,T^{-2}}$*.*

[4] Historicamente, como se sabe, as leis de equilíbrio da estática não foram formuladas com o pressuposto explícito de campos gravitacionais que se constituem em um desenvolvimento muito posterior. No entanto, hoje sabemos que as balanças somente se equilibram se mergulhadas em uma região onde haja gravidade. Em outras palavras, não se pode equilibrar uma balança em uma região do espaço sideral no qual a gravidade seja praticamente nula: lá tudo flutua. Hoje sabemos, que uma pessoa independentemente se esteja aqui na superfície da Terra ou na superfície da Lua tem a mesma massa newtoniana embora tenha pesos diferentes, pois os mesmos dependerão das respectivas acelerações com as quais os corpos caem em queda livre segundo os seus respectivos movimentos locais, por exemplo, na Terra e na Lua. Peso e Massa são proporcionais, isto é

$$\mathbf{P = M\,g}$$

[5] Ingrediente importante no contexto da crítica de Leibniz é a lei da queda livre de Galileu, lei esta segundo a qual o espaço percorrido em queda livre **h** é proporcional ao quadrado do tempo de queda **t** conforme

$$\mathbf{h = (1/2) g\,t^2}$$

Na fórmula anterior, **g** denota aceleração com a qual os corpos caem segundo os seus respectivos movimentos locais de pequenas alturas da superfície do objeto astronômico em tela. Se for a Terra, teremos a aceleração $\mathbf{g_{Terra}}$; se for a Lua, teremos $\mathbf{g_{Lua}}$; se for Júpiter, teremos $\mathbf{g_{Júpiter}}$ e assim por diante.

[21] A tradução para o português da nota precedente é:" O conceito newtoniano de massa pontual, ainda usado nos atuais livros de texto constitui a marca que separara o conceito de massa de Newton do conceito de extensão espacial".

Crítica de Leibniz a Descartes

Em primeira instância, podemos entender o teor da crítica de Leibniz a Descartes como uma sucessão de raciocínios envolvendo a confluência dos resultados da estática com a lei de queda livre de Galileu.

Vamos seguir o encadeamento de raciocínios da seguinte maneira:

(A) Sabemos da estática que um peso **4P** na extremidade de uma balança simples será equilibrado com um peso **P** na extremidade oposta se os braços da balança em relação ao ponto de equilíbrio obedecerem à seguinte condição: o braço que vai da extremidade na qual se encontra o peso **4P** até o ponto de apoio da balança vale **H** enquanto o braço que vai da extremidade na qual se encontra o peso **P** até o ponto de apoio vale **4H** (ver Fig. 5).

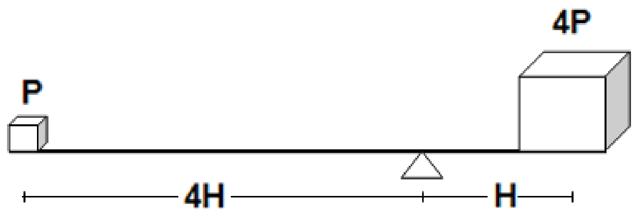
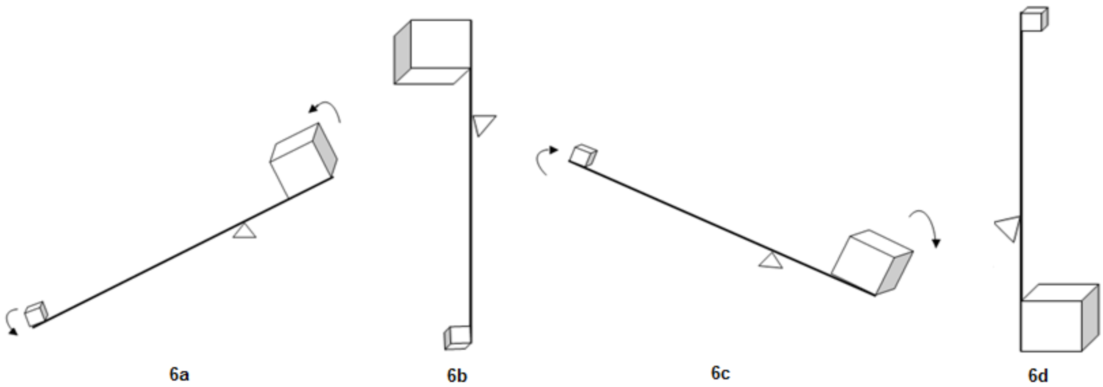


FIG. 5: Um corpo de peso **P** e braço de balança **4H** se equilibra com um corpo de peso **4P** e braço de balança **H**. Define-se por braço de balança a distância da extremidade onde se situa o peso e o ponto de apoio.

(B) Para responder sobre a questão do que produz o equilíbrio, analisemos a seguinte situação na qual este seja ligeiramente alterado. Se colocarmos um peso infinitesimal **δP** na extremidade na qual se encontra o peso **4P**, então a balança se desequilibra e o peso **P** da extremidade oposta se elevará até uma altura **4H** em relação ao ponto de apoio. De maneira análoga, se colocarmos um peso infinitesimal **δP** na extremidade na qual se encontra o peso **P**, então haverá um desequilíbrio e a partir deste instante o peso **4P** se elevará até uma altura **H** em relação ao ponto de apoio (ver Figs. 6a a 6d).



FIGS. de (6a) a (6d): Se adicionarmos um peso infinitesimal a uma das extremidades, então o peso da outra extremidade elevar-se-á até a altura correspondente ao seu braço da balança. A fig. (6a) representa a adição de um peso infinitesimal na extremidade à esquerda do ponto de apoio, o que vai redundar na situação exibida pela figura (6b). De maneira análoga, a fig. (6c) representa a adição de um peso infinitesimal na extremidade à direita do ponto de apoio, o que vai redundar na situação exibida pela figura (6d). Abstraindo o peso infinitesimal em ambas as situações (6b) e (6d), então podemos concluir que é equivalente levantar um peso P a uma altura 4H que levantar um peso 4P até uma altura H.

(C) Tudo isso sugere que há uma quantidade **R** que expressa uma equivalência seguinte,

$$\mathbf{(4P)\ H = P\ (4H)}$$

Em outras palavras, a quantidade **R** que é a *causa* da elevação do peso **4P** até uma altura **H** é exatamente igual à quantidade **R** que é a *causa* da elevação do peso **P** até uma altura **4H**. Doravante, vamos nos permitir proceder a um anacronismo, para efeito meramente didático, pois consideraremos a proporcionalidade entre peso e massa (**P ~ M**) estabelecida por Newton na primeira definição de seus *Principia*.

(D) Sobre a quantidade **R**, *causa* responsável pela elevação de um corpo até uma dada altura, é que Descartes e Leibniz deram respostas distintas.

(E) A crítica de Leibniz consiste em asseverar que a grandeza responsável por esta elevação é a sua *vis viva* $\mathbf{M\,V^2}$ e não a quantidade de movimento de Descartes **MV**. Reparemos que aqui introduzimos mais um anacronismo, para efeito meramente didático, ao atribuir o conceito newtoniano de massa aos conceitos respectivamente de Leibniz e de Descartes.

(F) Para tal, Leibniz aplica a lei de Galileu da queda livre às duas situações respectivamente representadas por um corpo de massa **M** que cai de uma altura **4H** e um corpo de massa **4M** que cai de uma altura **H**.

(G) Leibniz argumenta que se aplicarmos a lei de Galileu da queda livre às duas situações referidas em (F), então as respectivas quantidades de movimento quando os corpos atingem o solo serão diferentes. Para a queda de **4M** de uma altura **H** teremos uma quantidade de movimento no solo igual a $\mathbf{p_{(1)}= 4M(2gH)^{1/2}}$ e para a queda de **M** de uma altura **4H** teremos uma quantidade de movimento linear no solo igual **a** $\mathbf{p_{(2)}= 2M(2gH)^{1/2}}$. Logo,

$$\mathbf{p_{(1)} \neq p_{(2)}}$$

Segue dai, que elas são diferentes e que, portanto, a quantidade de movimento linear não representa a grandeza **R**. *Se nos utilizarmos da integração da força newtoniana correspondente agindo no tempo de queda, então os resultados, obviamente, serão exatamente os mesmos e assim o argumento de d'Alembert definitivamente não responde à crítica de Leibniz a Descartes*.

(H) De maneira inteiramente análoga, Leibniz argumenta que ao aplicarmos a lei da queda livre de Galileu às mesmas situações referidas em (F), então as respectivas *vis vivas* com as quais o solo é atingido são exatamente iguais, ou seja,

$$\mathbf{(Vis\ Viva)_{(1)} = (Vis\ Viva)_{(2)} = 8MgH}$$

Segue, portanto, que sendo exatamente iguais nas duas situações, então a grandeza *vis viva* leibniziana constitui-se em forte candidata para corresponder à quantidade **R**. *Se nos utilizarmos da integração da força newtoniana correspondente agindo no espaço no qual se dá a queda*[22]*, os resultados, obviamente, serão, exatamente (a menos de um fator 1/2 comum nas duas situações e portanto irrelevante no contexto da comparação entre as duas situações) os mesmos que os obtidos acima e assim o argumento de d'Alembert é capaz de responder à crítica de Leibniz a Descartes* ***apenas*** *no que diz respeito a esta integração da força newtoniana no espaço e* ***não*** *no que concerne àquela relativa à integração da força newtoniana no tempo.*

O princípio da identidade entre causa e efeito

No Axioma I do *Essay de Dynamique* de Leibniz de 1692 de responsabilidade do copista De Billette, encontramos o que se constitui no princípio leibniziano da identidade entre causa e

---

[22] $\mathbf{(Energia\ Cinética)_{(1)} = (Energia\ cinética)_{(2)} = 4MgH}$

efeito[23, 24]. Este princípio estabelece que a causa total deve ser avaliada pelo efeito que ela produza[25, 26, 27]. Trata-se do que podemos chamar de um *princípio de identidade entre causa e efeito*. Trata-se de um princípio a um só tempo, *causal e de conservação*.

Podemos proceder a uma cadeia de raciocínios que permite entender o que subjaz a este importante princípio.

(I) Suponhamos um mundo ideal que seja inteiramente mecânico, isto é, sem dissipações de quaisquer ordens. Neste mundo, um corpo de massa igual a **4M** que caia de uma altura **H** quando chegar ao solo colidirá elasticamente com este para imediatamente depois se alçar até atingir a mesma altura **H**. Tudo se repete e assim teremos movimentos sucessivos de subidas e decidas *ad infinitum*.

(J) De maneira análoga ao que foi descrito em (I) o mesmo acontecerá para um corpo de massa **M** que caia de uma altura **4H**.

(K) As subidas e descidas referidas em (I) e (J), que para um mundo ideal mecânico totalmente isento de dissipações de quaisquer ordens permaneceriam *ad infinitum*, podem ser substituídas pelo efeito, desta vez, totalmente inelástico, de deformar.

(L) Os efeitos que substituem as subidas e descidas referentes às situações (I) e (J) podem ser testados desde que estudemos as correspondentes deformações respectivamente causadas. Para tal, elegeremos duas esferas maciças de mesmo raio, mas de materiais de densidades diferentes. A esfera de massa **4M** será constituída de um material quatro vezes mais denso do que a esfera de massa **M** (ver Fig. 7).

(M) As esferas maciças de mesmo raio, correspondentes às situações descritas em (I) e em (J) cairão sobre massas de deformar de um mesmo tipo e material. A análise de suas respectivas deformações nos possibilitará inferir sobre o efeito produzido pela elevação das mesmas até as suas respectivas alturas.

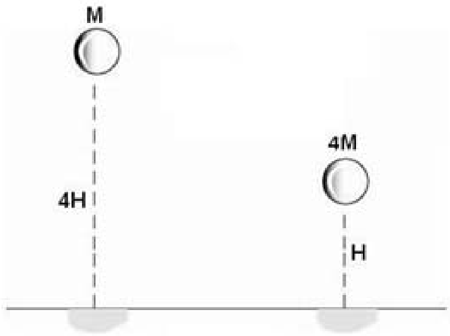


FIG. 7: Se o efeito de subir e descer for convertido no efeito de deformar, então a análise da deformação é indicativa da causa de elevar um corpo até uma dada altura. É o princípio de Leibniz da identidade entre causa e efeito: a causa deve ser avaliada pelo efeito produzido por ela.

[23] Axiome I: La même quantité de la force se conserve, ou bien, l'effet entier est égal à la cause totale.
[24] Axiom I: The same quantity of force is conserved, or rather, the whole effect is equal to the total cause.
[25] "On voit par là, comment la force doit être estimée par la quantité de l'effect qu'elle peut produire,.." (Leibniz, 1960, *Discours de Metaphysique*, Cap. XVII, pp. 422-444).
[26] "Por aqui se vê como a força deve ser avaliada pela quantidade do efeito que pode produzir,..." (Leibniz, 1983, *Discurso de Metafísica*, Cap. XVII; originalmente publicado em 1686)
[27] "De aqui se infiere que deba estimarse la fuerza por la cantidad del efecto que puede producir; (Leibniz, 1946, *Discurso de Metafísica*, Cap. XVII ; originalmente publicado em 1686)

(N) Em suma, todo este procedimento implica na aplicação do princípio da identidade entre causa total e seu efeito inteiro, ou dito de maneira alternativa, ao *princípio de identidade entre causa e efeito.*

(O) Se **R** convier ao momento linear, então a deformação *causada* pela massa **4M** caindo de uma altura **H** será duas vezes maior que a correspondente deformação causada pela massa **M** caindo de uma altura **4H.**

(P) Se **R** convier à *vis viva*, então a deformação no solo *causada* pela massa **4M** que cai a partir da altura **H** será exatamente a mesma que a deformação no solo *causada* pela massa **M** que cai a partir da altura **4H**.

(Q) Como se sabe, a experiência decide em favor da *vis viva* pois as deformações são iguais, e não em favor do momento linear cujo resultado seria a de uma deformação que fosse o dobro da outra. Logo, o efeito inteiro leva a uma causa **R** que é identificada como a *vis viva*.

Um princípio metafísico refém da lei da queda livre?

Uma pergunta importante é a seguinte:

Por que um princípio causal e de conservação que pretende ser geral se depara com a especificidade de uma lei que hoje sabemos é um caso particular da lei da gravitação newtoniana para situações em que a altura de queda seja pequena em comparação com o raio da Terra?

Para responder a esta questão é interessante aplicar às situações descritas em (I) e (J) fazendo uso da lei gravitacional de Newton (ver Silva & Bastos Filho, 1995a).

Para tal consideremos a interação de um dado corpo de massa $\mathbf{M_C}$ com a Terra cuja massa é denotada por $\mathbf{M_T}$ (ver Fig. 8). A força gravitacional agindo no corpo de massa em questão é:

$$\mathbf{F = G\,(M_T\,M_C)/(R_T + h)^2\,\hat{e}}$$

Na fórmula acima, **G** denota a constante de gravitação universal, $\mathbf{R_T}$ o raio geométrico da Terra, **h** a altura a partir da qual o corpo cairá em relação ao solo e **ê** o versor adimensional que aponta na direção do centro da Terra.

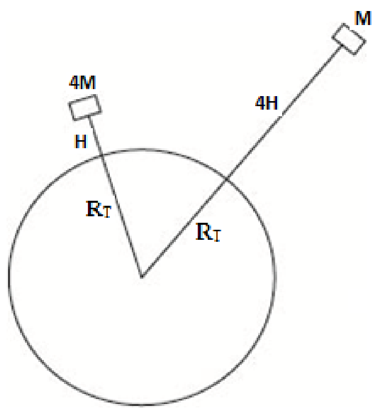


FIG. 8: O problema de Leibniz analisado à luz da teoria gravitacional de Newton

Aplicando a fórmula acima às situações referidas por (I) e (J) e calculando a variação da energia cinética (vis viva/2) experimentada pela eficácia da força newtoniana agindo no espaço, e reportando-nos apenas à variação de energia cinética total durante a queda, então obtemos os resultados respectivamente,

$$\Delta(\mathbf{E_{Cin}})_{(1)} = \{[\mathbf{GM_T\ M\ 4H}]/[(\mathbf{R_T})^2 + \mathbf{4R_TH}]\}$$

$$\Delta(\mathbf{E_{Cin}})_{(2)} = \{[\mathbf{G\ M_T\ 4\ M\ H}]/[(\mathbf{R_T})^2 + \mathbf{R_TH}]\}$$

Embora as vis vivas correspondentes sejam respectivamente os dobros de suas energias cinéticas, a razão entre essas variações de energia cinética é exatamente igual à razão entre as respectivas *vis vivas*. Assim,

$$\{\Delta(\mathbf{E_{Cin}})_{(1)}/\ \Delta(\mathbf{E_{Cin}})_{(2)}\} = \{\ (\mathbf{Vis\ Viva})_{(1)}/(\mathbf{Vis\ Viva})_{(2)}\} = [(\mathbf{R_T})^2 + \mathbf{R_T\ H}]/[(\mathbf{R_T})^2 + \mathbf{4R_T\ H}]\}$$

Vejamos o que podemos inferir da expressão acima se supusermos

$$(\mathbf{R_T})^2 >> \mathbf{4R_T\ H}$$

É evidente que se o quadrado do raio geométrico da Terra $(\mathbf{R_T})^2$ for muito maior que quatro vezes o produto do raio da Terra $\mathbf{R_T}$ com a quantidade **H**, então a razão entre as duas energias cinéticas, bem como a razão entre as duas *vis vivas* nas situações consideradas, serão ambas, muito próximas de 1. E aí para propósitos práticos as suas respectivas energias cinéticas serão consideradas como muito aproximadamente iguais e o mesmo vale, evidentemente, para as suas *vis vivas*. Podemos facilmente avaliar o erro cometido nesta aproximação. Consideremos $\mathbf{H} = 10^3$ metros e o raio da Terra como $\mathbf{R_T} = 6{,}4 \times 10^6$ metros

$$4{,}096 \times 10^{13} >> 4 \times 6{,}4 \times 10^6 \times 10^3$$

$$4{,}096 \times 10^{13} >> 2{,}56 \times 10^{10}$$

$$1 >> 6{,}25 \times 10^{-4}$$

Logo, nesta aproximação comete-se um erro de apenas 6 décimos milésimos.

A aproximação é muito razoável, mas não é este o problema. O problema é de natureza filosófica. Pode parecer estranho que um princípio metafísico como o da identidade entre causa e efeito que pode ser enunciado como *a causa deve ser estimada pela quantidade do efeito que ela possa produzir* somente tenha validade exata no caso em que seja aplicada a lei da queda livre de Galileu, mas quando analisamos o mesmo problema à luz da lei da gravitação de Newton, então a validade é apenas aproximada, ainda que seja uma excelente aproximação. No entanto, o princípio metafísico continua valendo tal como antes. Efetivamente, para quem não adota uma concepção positivista de mundo, valores meramente numéricos que são obtidos numa dada precisão, não podem nem corroborar nem descartar um princípio metafísico, pois nenhum conjunto de experimentos realizados com dadas premissas e concepções prévias poderá testar a identidade entre causa e efeito. A polêmica travada entre Leibniz e os cartesianos, portanto, não pode testar empiricamente um princípio metafísico.

Distinção muito importante entre energia e momento linear

Vamos trazer à baila nesta seção um exemplo contundente que permite discriminar com grande clareza as diferenças entre os conceitos, respectivamente de força newtoniana, de momento linear e de energia (ver Silva & Bastos Filho, 1995b).

Consideremos a interação entre a Terra e um tijolo. Como, sabemos as forças newtonianas de interação da Terra com o tijolo são iguais e contrárias em conformidade com a terceira lei de Newton. Como a lei de interação gravitacional entre a Terra e o tijolo em questão se reporta a uma interação instantânea a distância, então teremos

$$|M_T\ (\delta V_T/\delta t)| = |M_{Tij.}\,(\delta V_{Tij.}/\delta t)|$$

Tendo em vista que o tempo de duração **δt** da interação é comum para ambos os corpos que interagem, então,

$$|M_T\ \delta V_T| = |M_{Tij.}\,\delta V_{Tij.}|$$

Suponhamos os seguintes valores numéricos para as massas respectivamente da Terra e do tijolo:

$$M_T = 6\ 10^{24}\ \mathrm{Kg} \text{ e } M_{Tij.} = 1\ \mathrm{kg}$$

Suponhamos que a variação de velocidade experimentada pelo tijolo seja de

$$|\delta V_{Tij.}| = 6\ \mathrm{m/s}$$

Deste modo, a variação de velocidade experimentada pela Terra será,

$$|\delta V_T| = 10^{-24}\ \mathrm{m/s}$$

As variações das energias cinéticas, respectivamente, do tijolo e da Terra, supostas ambas inicialmente em repouso, serão portanto,

$$\delta E_{Tij.} = (1/2)M_{Tij.}\,(\delta V_{Tij.})^2 = 18\ \text{Joules.}$$

$$\delta E_T = (1/2)M_T\ (\delta V_T)^2 = 3\ \ 10^{-24}\ \text{Joules}$$

Vejamos que enquanto as forças newtonianas de interação entre tijolo e Terra bem como as suas correspondentes variações de momento linear são exatamente iguais em módulo e contrárias em direção, as energias cinéticas adquiridas, respectivamente pelo tijolo e pela Terra, são enormemente distintas. Não haverá qualquer problema para um banhista que deite na areia da praia e que sobre o seu rosto seja transferida a energia cinética da Terra, mas o mesmo não podemos dizer em relação à energia cinética do tijolo que é superior à energia cinética da Terra em um valor de 23 ordens de grandeza. Aí está uma diferença abissal entre os conceitos de energia e de momento linear. Tão simples e tão elementar, mas frequentemente esquecida.

Nascentes que remetem para outras nascentes

A metáfora dos rios cujas nascentes conhecidas remetem a outras ainda mais primárias talvez seja interessante para se avaliar o quanto um autor é tributário da tradição. É evidente que sem recorrermos à tradição nada seríamos, pois estaríamos a cada instante a reinventar a roda. Se hoje nos utilizamos de nossa língua materna é porque dela herdamos como um patrimônio extraordinário a qual, se sozinhos estivéssemos, com toda a certeza não teríamos capacidade de construí-la no tempo de nossas vidas. Neste contexto, podemos dizer que Leibniz também é tributário de outros pensadores seminais do século XVII como Galileu (1564-1642) e Huygens (1629-1695). Galileu, por exemplo, nos seus *Discorsi* originalmente publicados em 1638 em Leiden, na Holanda, obteve resultados que de alguma maneira preparam a ideia leibniziana de *vis viva*. Na terceira jornada dos *Discorsi* e numa fala do personagem *Salviati* podemos constatar o resultado[28] importantíssimo segundo o qual, uma vez livre de quaisquer impedimentos e dissipações, a velocidade alcançada no solo, após o corpo cair em queda livre de uma altura **h**, é exatamente a mesma velocidade alcançada no solo se o corpo deslizar em um plano de qualquer inclinação, desde que parta da mesma altura **h** (ver Fig. 9). Este *princípio é o da independência da trajetória*. Ele pode ser formulado da seguinte maneira: *independentemente de trajetória segundo um plano inclinado de qualquer que seja a inclinação, um corpo, livre de quaisquer impedimentos, se partir de uma mesma altura, atingirá o solo com a mesma velocidade*.

FIG. 9 Livre de quaisquer impedimentos, um corpo que desliza em um plano inclinado descendente a partir de uma altura h atingirá em um plano inclinado ascendente, de qualquer inclinação, a mesma altura h. Galileu mostrou isso baseado na ideia de ímpeto.

A lei da queda livre ainda nos permite concluir que a velocidade alcançada no solo é proporcional à raiz quadrada da altura de queda $\mathbf{v} \sim (\mathbf{h})^{1/2}$, ou ainda, que o quadrado da velocidade atingida no solo é proporcional à altura da qual o corpo caia em queda livre, ou seja, $\mathbf{v}^2 \sim \mathbf{h}$. Se combinarmos o importante resultado expresso pelo *princípio da independência da trajetória* com o resultado segundo o qual $\mathbf{v}^2 \sim \mathbf{h}$, então veremos que há algo de muito fundamental nesta quantidade que é proporcional ao quadrado da velocidade. Isso se reforça quando nos reportamos ao conceito de *ímpeto* utilizado por Galileu. Vejamos como: Galileu[29] argumentou que o *ímpeto* de um corpo que deslize a partir de uma dada altura **h** em um plano inclinado descendente o permitirá alcançar a mesma altura **h** após percorrer um plano inclinado ascendente. No entanto, a altura alcançada não será maior que **h**. Reunindo todos estes resultados forçosamente concluímos *que definitivamente há uma quantidade causal* **Q** *que se conserva e esta é* **proporcional a** $\mathbf{v}^2$. Desde modo, embora a física de Galileu fosse uma ciência no contexto do sistema **L T**, podemos atribuir a ele créditos como um precursor - no sentido de uma importante nascente embrionária dos conceitos de *vis viva* e de energia -, os quais, como sabemos, requerem uma física no contexto do sistema **M L T**.

Ainda tendo em mente a metáfora dos rios, podemos dizer que outra nascente muito importante para o estabelecimento do conceito de *vis viva* foi Christian Huygens (1629-1695). No seu trabalho sobre colisões, ele contribuiu muito relevantemente para o estabelecimento de uma quantidade que se conservava e era proporcional ao quadrado da velocidade. Em seu famoso ensaio *Horologium oscillatorium*, originalmente publicado em 1673, Huygens (1986), enfatizou a importância central do princípio galileano da independência das trajetórias e o generalizou (ver Smith, 2006) para os movimentos de descida em trajetórias curvilíneas. Lagrange (1788) deu todos os créditos do princípio da conservação da *vis viva* a Huygens, sem qualquer menção a Leibniz.

Aqui encerramos as nossas considerações nesta seção sobre as nascentes intelectuais que remetem a nascentes ainda mais primárias. Isto é interessante para ser enfatizado em um contexto didático com o fito de mostrar o quanto somos tributários da tradição.

[28] " Os graus de velocidade alcançados por um mesmo móvel em planos diferentemente inclinados são iguais quando as alturas desses planos também são iguais"(Galilei, *Discorsi*, p. 133)

[29] "Do que foi dito podemos deduzir, portanto, que se um móvel, após ter descido por um plano inclinado qualquer, tem seu movimento desviado através de um plano ascendente, subirá em virtude do *ímpeto* adquirido até uma altura igual àquela que tinha com respeito à horizontal." (Galilei, *Discurso*, p. 174).

E a solução de d'Alembert é capaz de dirimir a polêmica?

Cada vez mais, tem sido questionada a opinião frequentemente ouvida segundo a qual d'Alembert houvera dirimido a polêmica resultante da crítica de Leibniz a Descartes, e que, além disso, também houvera oferecido uma solução que a considerava como uma "mera confusão de palavras", ou seja, como algo decorrente de uma discussão "fútil e inútil". A atribuição a D'Alembert dos louros da solução final de uma polêmica, complexa, sutil e duramente travada entre Leibniz e os cartesianos, foi considerada como um mito por diversos autores entre os quais Laudan (1968); Iltis (1970) e Shimony (2010). Carolyn Iltis[30], por exemplo, argumenta que "d'Alembert tem muito pouco a ver com a conclusão da polêmica, seja prática, teórica ou historicamente". Além disso, assevera ela que "d'Alembert não foi sequer o primeiro a chamar a discussão de *mera disputa de palavras*" nem "sequer foi o primeiro a acentuar que a força newtoniana integrada no tempo redunda na variação de momentum linear e que a força newtoniana integrada no espaço redunda na variação de energia cinética". Continuando, Iltis argumenta que "d'Alembert não reivindicou o uso simultâneo do momentum linear e da *vis viva* para a solução do problema do impacto nem sequer propiciou uma discussão completa de molas comprimidas e de corpos que caem em queda livre". Muito menos ainda, "deu qualquer importância aos aspectos teológicos e metafísicos" que, como sabemos, são elementos centrais da crítica leibniziana. Finalmente, conclui Iltis, "que o ano de 1743 é completamente irrelevante para o problema da *vis viva*". Acrescente-se a tudo isso, o fato de que no ano de 1743 d'Alembert não cita sequer o argumento pelo qual se notabilizou como solucionador da polêmica, uma vez que o famoso argumento somente veio à tona na segunda edição[31] de seu *Traité de Dynamique*, tão somente publicada em 1758. O fato de que a polêmica tenha prosseguido, como mostrou Laudan (1968), para além do ano de 1758, é um indicativo relevante de que a mesma não foi *solucionada* por d'Alembert. Muito provavelmente, o mito tem origem em posições assumidas por pensadores empiristas e positivistas[32], ou ainda por seguidores de ambas estas adoções filosóficas, e que, portanto, desprezaram o teor metafísico da polêmica que desempenhava papel muito relevante no contexto da argumentação de Leibniz. Esta razão foi de primordial importância para os conduzir a uma avaliação equivocada decorrente de uma falta de compreensão aprofundada da crítica leibniziana. Autores que segundo Iltis propagaram o mito da solução d'Alembertiana de 1743 foram Mach[33],Whewell[34], Bernard Stallo[35] e Montucla[36].

Este mal-entendido não parou por ai e repercutiu nas opiniões de autores como Cajori e Schönfeld (ver Shimony, 2010). Outro autor que repete o mito é Alexander[37]. Nesta mesma direção, Schönfeld chegou a declarar d'Alembert como vencedor, que Descartes e Leibniz tinham ambos razão a seu próprio modo e que d'Alembert deliberadamente houvera apenas considerado aquilo que poderia ser investigado quantitativamente, tendo simplesmente ignorado o resto. Só que o

[30] "It seems, therefore, that d'Alembert had very little to do with the termination of the *vis viva* controversy either theoretically, practically or historically. He was not the first to call it 'a dispute over words'. He was not the first to contrast momentum as a force acting through a time interval with *vis viva* as a force over the space traversed. He did not advocate the simultaneous use of momentum and *vis viva* to solve impact problems. He did not give a complete discussion of the use of *vis viva* in solving problems relating to compress springs and falling bodies. Nor did he deal with some of the important philosophical and theological issues regarding conservation of *vis viva* which were basic to the arguments of some participants. Finally, in the year 1743 d'Alembert did not present the argument which had heretofore been cited as resolving. The date of 1743 is therefore of no significance as a terminus for the *viva viva* controversy" (Iltis, 1970, p. 140).

[31] Lindsay (1970, p. 393) indica que os argumentos de D'Alembert sobre a polêmica da *vis viva* podem ser encontrados na página XXIII do "Discours préliminaire" do *Traité du Dynamique* 2ª edição, Paris, 1758.

[32] O termo positivista ai é tomado apenas no sentido amplo de aversão à metafísica. Evidentemente, por razões cronológicas, não se refere a Comte (1798-1857) que também desdenhava da metafísica.

[33] Mach, E. 1960, *Science of Mechanics*, 6ª edição, p. 365.

[34] Whewell, W. 1872, *History of the Indutive Science*, 3ª edição, 2 volumes, New York, Vol I, p. 361.

[35] Stallo, J. B. 1884, *The Concepts and Theories of Modern Physics*, New York, p. 72.

[36] Montucla, J. E. 1799-1802,, *Histoire des Mathématiques*, 3 volumes, Paris Vol III, p. 641.

[37] "The dispute about moving force came effectively to an end after the publication in 1743 of d'Alembert's *Traité de Dynamique*." (Alexander, 1956, p. xxxi).

"resto" não é simplesmente o resto e sim a parte fundamental do *princípio metafísico de identidade entre causa e efeito*. A estreiteza positivista dos críticos de Leibniz lhes impediu que avaliassem a devida profundidade do seminal pensador alemão e a alta pertinência de suas ideias para o desenvolvimento ulterior da Física. Exatamente por esta razão, propuseram análises equivocadas, insuficientes e que não podem ser consideradas, de maneira alguma, como respondendo à aguda crítica de Leibniz.

Um ponto muito importante para uma compreensão minimamente satisfatória dos argumentos de Leibniz é que o fato do momentum linear e da *vis viva* serem quantidades mensuráveis e passíveis de serem expressas em termos newtonianos, isto por si só, não implica que a Física (Filosofia Natural) seja redutível à geometria nem que ela seja redutível aos Princípios Matemáticos. A parte de que a Física não é redutível à geometria é central nos argumentos de Leibniz contra Descartes e a parte de que ela não se reduz simplesmente aos Princípios Matemáticos é fundamental na crítica de Leibniz contra Newton, como bem mostra a Correspondência Leibniz-Clarke. Da irredutibilidade da Física à geometria pode-se concluir muito diretamente do capítulo 21 do *Discurso de Metafísica* com um título *"Se as regras mecânicas dependessem unicamente das geometrias sem a metafísica, os fenômenos seriam outros"*. No que concerne à crítica a Newton, é importante que prestemos atenção ao argumento contido na segunda carta de Leibniz[38, 39] a Clarke segundo o qual para se construir toda a Matemática é suficiente que nos atenhamos ao *princípio da não contradição*, mas se quisermos construir a Física, além deste princípio temos ainda que adotar o *princípio da razão suficiente* que no fundo é um princípio metafísico e de natureza causal (Para detalhes, ver Bastos Filho, 1999).

Um aspecto importante foi ressaltado por Shimony[40] acerca da compreensão sempre mais e mais refinada de Leibniz acerca do problema da *vis viva*. Leibniz aceitou ambos os princípios (momentum linear e *vis viva*), mas havia uma preferência ditada por uma prioridade baseada em uma hierarquia cuja importância era firmemente baseada em princípios filosóficos. No texto de 1692 do *Essay de Dynamique*, Leibniz é perfeitamente cônscio de que os dois princípios -o da *conservação da progressão* e o da *conservação da* vis *viva*- são ambos válidos. A conservação da progressão, argumenta Leibniz com clareza, não é a mesma coisa da conservação da quantidade de movimento cartesiana e sim o que hoje chamaríamos de momento linear moderno considerado como uma quantidade vetorial. Leibniz usa a palavra *avancement* em francês para expressar *progressão* (*progression* em inglês). Os excertos correspondentes exibidos em notas de rodapé em francês[41] (língua em que Leibniz escreveu o livro) e sua correspondente tradução para o inglês[42] são claríssimas acerca do argumento aqui esboçado.

---

38 "O grande fundamento dos matemáticos é o princípio da contradição, ou da identidade, isto é, que um enunciado não poderia ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo, e que assim A é A, e não poderia ser não-A. E esse único princípio basta para demonstrar toda a aritmética e toda a geometria, ou seja, todos os princípios matemáticos. Mas, se desejamos passar da matemática à física, precisamos de um outro princípio ainda, como observei em minha *Teodicéia*, quer dizer o princípio da razão suficiente: que nada acontece sem que haja uma razão para que isso seja assim antes do que de outro modo". (Leibniz 1988, p. 237)

39 "The great foundation of mathematics is the principle of contradiction, or identity, that is, a proposition cannot be false and true at the same time; and that therefore A is A, and cannot be not A. This single principle is sufficient to demonstrate every part of arithmetic and geometry, that is all mathematical principles. But in order to proceed from mathematics to natural philosophy, another principle is requisite, as I have observed in my *Theodicy*: I mean, the principle of a sufficient reason, viz. that nothing happens without a reason why is should be so, rather than otherwise". (Leibniz, In: Alexander, pp. 15-16).

40 "Leibniz thus accepted both principles. But why did he prefer the principle of conservation of living force -the precursor of the principle of conservation of energy- over that of conservation of progress or momentum?" (Shimony, 2010, p. 52).

41 "On pourrait aussi donner une autre interprétation à la quantitè de mouvement selon laquelle cette quantité se conserverait , mais ce n'est pas celle que les Philosophes ont entendue. Par exemple les corps A et B allant chacun avec sa vitesse, la quantité totale du mouvement est la somme de leurs quantité de mouvement particulières; et c'est aussi que Descartes et ses sectateurs ont entendue la quantité de mouvement, et pour en être assuré on n'a qu'à voir les règles du

Firmemente munido do princípio metafísico de identidade entre causa e efeito e do princípio metafísico da razão suficiente é que Leibniz se encaminhará para o julgamento de que a conservação de sua *vis viva* tem prioridade em relação ao princípio da conservação da *progressão*. De fato, é a sua *vis viva* que responde pela *causa* de levantar um corpo até uma dada altura e tudo isso seguindo a linha precursora do *ímpeto* necessário para elevar um corpo até a altura **h** como argumentou Galileu ainda no contexto de uma Física do **LT**; e também na linha dos trabalhos e argumentos de Huygens, aliás tido por Lagrange como o legítimo descobridor da lei da conservação da *vis viva*.

Podemos ainda dizer que se nos ativermos ao conceito de Lakatos de Programas de Pesquisa Científica, tanto Descartes quanto Leibniz centram seus respectivos Programas em Leis de Conservação e em princípios causais. Ambos os programas, em larga medida, sobrevivem e ambas as ideias centrais, com as devidas correções, fazem parte do patrimônio científico das ciências físicas.

Se nos ativermos à lição leibniziana, então compreenderemos que além da geometria e dos princípios matemáticos existe bem mais. É precisamente aí que devemos entender o seguinte fato: a solução dada por d'Alembert é insuficiente e pobre para responder à questão posta por Leibniz.

Conclusões

Definitivamente, o momentum linear e a energia não são grandezas que se constituam em opções equivalentes para dar conta da crítica de Leibniz. Um princípio de conservação na sua inteireza convém muito mais à energia -uma grandeza que se transforma em modalidades as mais diversas (gravitacional, eletromagnética, calor etc.)- que a conservação do momento linear. O estabelecimento da conservação da energia no século XIX confere a esta lei um estatuto bastante diferenciado no confronto com a lei da conservação do momento linear, também importante, mas de um teor qualitativamente distinto.

O simples exemplo discutido na seção 7 revela de maneira extremamente didática que a crítica de Leibniz a Descartes não pode ser respondida indistintamente pelas duas grandes leis em questão. Definitivamente, numa interação a dois corpos as forças newtonianas de interação bem como as suas respectivas variações de quantidade de movimento são iguais em módulo e contrárias em direção, mas as suas respectivas energias cinéticas são enormemente distintas. Os efeitos causados pelos dois corpos em consideração também são enormemente distintos e isso convém à energia e não ao momento linear nem à força newtoniana. Decerto, a energia pode ser expressa em

---

mouvement que lui ou d'autres, qui ont suivi son principe, ont donnés. Mais se l'on voulait entendre para la quantité de mouvement, non pas le mouvement absolument pris (où n'a point égard de quel côte il va) mais ***l'avancement*** vers un certain côté, alors ***l'avancement total*** (ou le mouvement respective) sera la somme des quantités de mouvement particulières, quand les deux corps vont d'un même côté. Mais lorsqu'ils vont l'un contre l'autre, ce sera la difference de leurs quantités de mouvement particulières. Et on trouvera que la ***même quantité de l'avancement se conserve***. Mais c'est ce qu'il ne faut pas confondre avec la quantité de mouvement prise dans le sens ordinaire." (Leibniz, In: Costabel, 1973, p. 128; ênfases em negrito acrescentadas por nós).

[42] "It would be possible also to give another explanation of quantity of motion, according to which that quantity would be conserved, but it is not what is meant by Philosophers. For example, in the case of bodies A and B, each moving with its own velocity, the total quantity of motion is the sum of their individual quantities of motion; and that is what Descartes and his followers have understood by quantity of motion, and to be convinced of the fact, it is only necessary to look at the rules of motion which he or others, who have adopted his principle, have given. But if we want quantity of motion to mean, not motion taken absolutely (where no attention is paid to the direction it takes), but ***progression*** in a certain direction then the ***total progression*** (or relative motion) will be the sum of the individual quantities of motion, when the bodies come from the same direction. But when they come from opposite directions, it will be the difference of their individual motions. And it will be found that the **same quantity of progression is conserved**. But that must not be confused with the quantity of motion taken in the usual sense". (Leibniz, In: Costabel, 1973, p. 129).

termos newtonianos como resultante da integração desta no espaço, mas não é esta a questão trazida à baila por Leibniz e isso não responde à pergunta de Leibniz.

Outrossim, como foi mostrado na seção 9, Leibniz, nos seus escritos de 1692, estava absolutamente cônscio de que mais uma modificação da lei original da quantidade de movimento de Descartes (que não se conservava pois era de natureza escalar) fazendo nela intervir o aspecto direcional da velocidade (hoje diríamos aspecto vetorial) a transformava em lei da *conservação da progressão,* certamente, esta última sim, uma grandeza que se conservava. No entanto, estabelece Leibniz uma hierarquia que emprestava um estatuto superior à sua conservação da *vis viva*. Os desenvolvimentos da termodinâmica no século XIX corroboram esta perspectiva de Leibniz pois a *conservação da energia* assume destacado estatuto definitivamente não assumido pela moderna conservação do momento linear.

Desprezar o conteúdo metafísico da polêmica é mutilá-la e não compreendê-la. O princípio de identidade entre causa e efeito e o princípio da razão suficiente segundo o qual *se algo ocorre há uma razão para que isso seja assim e não de qualquer outro modo* são imprescindíveis para a compreensão devida dos argumentos de Leibniz.

Em suma, podemos dizer que o estudo crítico dos argumentos de Leibniz é enormemente vantajoso para o ensino de Física pois trás à luz questões fundamentais nunca vistas nas abordagens tradicionais e jamais percebidas por essas.

Referências

Alexander, H. G. (1956). *The Leibniz-Clarke Correspondence (Together with extracts from Newton's Principia and Opticks),* Alexander, G. H. (Org.), Manchester University Press.

Bastos Filho, J. B. (1986) 'Cartesian and Newtonian Concepts of Mass', *American Journal of Physics,* Vol. 54, n. 3, pp. 201-202.

Bastos Filho, J. B. (1987) 'Comment on Letter by Erlichson', *American Journal of Physics*, Vol. 55, n. 11, p. 969

Bastos Filho, J. B. (1989); Xavier de Araújo, R. M. 'Conflitos entre os *Principia* de Newton e os *Principia* de Descartes'. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, Campinas, série 2, 1 (1), pp. 65-76.

Bastos Filho, J. B. 'Descartes, Leibniz, Newton and Modern Physics: Plenum, Action at a Distance and Locality'**.** In: *La Scienza e i Vortici del Dubbio***,** Conti, L. ; Mamone Capria M. (Orgs.) Nápoles: Edizioni Scientifiche Italiane, 1999, pp. 327-356.

Costabel, P. **(**1973). *Leibniz and Dynamics (The texts of 1692)*, Hermann: Paris; Londres: Methuen; Cornell University Press, Ithaca, NY.

Couturat, L. (1903). 'Le système de Leibniz d'après M. Cassirer', *Revue de métaphysique et de morale* II, p. 83-99.

D'Alembert, J. R. (1758). *Traité de Dynamique* (2ª edição). Paris . Disponível em: <http://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Alembert_-_Trait%C3%A9_de_dynamique_(1758).djvu&page=28>, acessado em 24/04/2012,

Dascal, M. (2010). *The Practice of Reason (Leibniz and his Controversies)* DACAL, M.(Org.) Amsterdam: John Benjamins Publising Company.

Descartes, R. (1952). *Les Principes de la Philosophie*, In: Oeuvres et Lettres. Andre Bridoux, Paris: Bibliothèque de la Pléiade, [Originalmente publicado em 1644]

Galilei, G. (s/d). *Duas Novas Ciências*. São Paulo: Nova Stella Editorial; Ched Editorial; Instituto Cultural Ítalo-Brasileiro. Tradução e notas de Letizio Mariconda e Pablo Rubén Mariconda. [livro originalmente publicado em Leiden, Holanda, 1638 com o título *Discorsi e Demostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica ed ai Movimenti Locali*]

Huygens, C. (1986). *The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations concerning the Motion of Pendula as Applied to Clocks.* Tradução de R. J. Blackwell. Ames: Iowa State University Press, [tradução para o inglês do original *Horologium Oscillatorium sive de moto pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Paris, 1673]

Iltis, C. (1970). 'D'Alembert and the Vis Viva Controversy', *Studies in History and Philosophy of Science*, I, nº 2, pp. 135-144

Jammer, M. (1970). *Concepts of Space (The History of Theories of Space in Physics)*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 2ª edição.

Jammer, M. (1997) *Concepts of Mass in Classical and Modern Physics*, Cambridge,MA: Harvard University Press, Dover Edition.

Lagrange, J. L. (1997). *Mecanique Analytique*. Paris, 1788 (2ª edição 1811). Tradução para o inglês de Boissonnade, A. e Vagliente, V. N. Analytical Mechanics, Dordrecht: Kluwer.

Lakatos, I. (1979).*'O Falseamento e a Metodologia dos Programas de Pesquisa Científica'*. In: A Crítica e o Desenvolvimento do Conhecimento, LAKATOS, I; MUSGRAVE, A. (Orgs.), São Paulo Cultrix, Ed. da Universidade de São Paulo, pp. 109-243.

Laudan, L. L. (1968). 'The vis viva controversy in a post mortem', *Isis*, Vol. 59, p. 131.

Leibniz, G. W. (1946) *Discurso de Metafísica*, In: Tratados Fundamentales, Buenos Aires: Editorial Losada, S. A. pp. 93-148

Leibniz, G. W. (1960). Discours de Metaphysique. *In: Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz,* Volume IV, 1960, pp. 427-463.

Leibniz, G. W. (1983). Discurso de Metafísica. In: Coleção *Os Pensadores*, Vol. Newton/Leibniz. Tradução de M. Chauí. São Paulo: Abril Cultural.

Leibniz, G. W. (1988). Correspondência com Clarke. In: Coleção *Os Pensadores*, Vol. Leibniz II Tradução de Carlos Lopes de Matos. São Paulo: Nova Cultural, , pp.233-298.

Leibniz, G. W. (1973). *Essay de Dynamique*, In: Costabel, P. Leibniz and Dynamics (The texts of 1692), apêndice I. Paris: Hermann; Londres: Methuen; Ithaca, NY: Cornell University Press, [O Ensaio de Dinâmica de Leibniz está disponível neste apêndice I do livro de Costabel tanto no original em francês de responsabilidade do copista De Billette quanto na tradução em língua inglesa]

Lindsay, R. B. (1971). 'The Concept of Energy and Its Early Historical development', *Foundation of Physics*, Vol. 1, nº 4, pp. 383-393.

Mach, E. (1921). *Die Mechanik*. Leipzig: Brockhaus 8ª ed.

Newton, I. (1990). *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, Vol. 1, São Paulo: Nova Stella, Editora da Universidade de São Paulo. Trad. de Trieste Ricci, Leonardo Gregory Brunet, Sônia Terezinha Gehring &Maria Helena Curcio Célia

Schönberg, M. (1985). *Pensando a Física*. São Paulo: Brasiliense, 2ª edição.

Shimony, I. (2010). *Leibniz and vis viva controversy***.** In: The Practice of Reason (Leibniz and his Controversies) DASCAL. M. (Org.) Amsterdam: John Benjamins Publising Company, p. 51-74. . Disponível em:

http://books.google.com.br/books?id=4XhKkK9Ms70C&pg=PA51&hl=pt-BR&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false . Acesso em 19 julho. 2012

Silva, L. A. ; Bastos Filho, J. B. (1995a) 'Which is the "true force"? Descartes' quantity of motion or Leibniz's vis viva?', Third International History, Philosophy, and Science Teaching Conference, Minneapolis, Minnesota, EUA, 29 de outubro - 1 de novembro de 1995, pp. 1068-1079.

Silva, L. A. ; Bastos Filho, J, B**. (**1995b) 'Crítica de Leibniz concernente ao problema da "verdadeira" força'**,** *Scientia,* (São Leopoldo, RS) v. 6 n. 1, pp. 65-88.

Smith, G. E. (2006) 'The *vis viva* dispute: a controversy at the dawn of dynamics', *Physics Today*, volume 10, pp. 31-36.

Recebido em: 30.10.12
Aceito em: 01.04.14