UMA APROXIMAÇÃO ENTRE MODELAGEM MATEMÁTICA E UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS PARA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: O CASO DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS
(An approach between Mathematical Modelling and Potentially Meaningful Teaching Units: the case of difference equations)

Adriana Helena Borssoi [adrianaborssoi@utfpr.edu.br]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Londrina – Paraná
Lourdes Maria Werle de Almeida [lourdes.maria@sercomtel.com.br]
PECEM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Universidade Estadual de Londrina – UEL, Londrina – Paraná

Resumo

Neste texto propomos uma estrutura para atividades educacionais em que Unidades de Ensino Potencialmente Significativas caracterizadas em Moreira (2011) são subsidiadas por atividades de modelagem matemática. Apresentamos resultados de uma pesquisa em que investigamos a ocorrência de aprendizagem significativa de alunos envolvidos com atividades de modelagem em uma unidade de ensino associada ao estudo de equações de diferenças. As atividades foram desenvolvidas no âmbito da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática no quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática. A análise que fizemos evidencia alguns elementos que indicam que atividades de modelagem contemplam princípios conceituais e metodológicos que norteiam uma UEPS. A partir da identificação desses elementos analisamos quatro alunos no decorrer do desenvolvimento da UEPS mediada pelas atividades de modelagem e podemos conjecturar que os princípios básicos para a ocorrência de aprendizagem significativa bem como a sinalização de reconciliação integradora e de diferenciação progressiva podem ser evidenciados. Neste sentido, a inclusão de atividades de modelagem na UEPS pode fortalecê-la no que se refere à sua capacidade de promover a aprendizagem significativa dos estudantes.
Palavras-chave: aprendizagem significativa; UEPS; modelagem matemática.

Abstract

In this paper we propose a framework for educational activities in which the *Potentially Meaningful Teaching Unit* (PMTU), proposed in Moreira (2011), are subsidized by mathematical modeling activities. We present results of a research that investigated the occurrence of meaningful learning of students involved in the modeling activities in a teaching unit associated with the study of difference equations. The activities were conducted within the discipline Mathematical Modeling Perspective on Mathematics Education in the fourth year of a Bachelor's Degree in Mathematics. The analysis we did shows some evidence that modeling activities include conceptual and methodological principles that guide a PMTU. From the identification of these elements we analyzed 04 students during the development of PMTU mediated modeling activities and we may conjecture that the basic principles for the occurrence of meaningful learning and signaling integrative reconciliation and progressive differentiation can be demonstrated. In this regard, the inclusion of modeling activities in PMTU can strengthen it with respect to its ability to promote meaningful learning.
Keywords*:* meaningful learning; PMTU; mathematical modeling.

Introdução

A teoria da aprendizagem significativa teve sua origem em 1963 com David Ausubel e recebeu depois contribuições de vários pesquisadores como, por exemplo, J. Novak, D. Gowin, M.

A. Moreira. Buscar essa aprendizagem por meio das atividades escolares desenvolvidas com alunos nos diferentes níveis de escolaridade, ainda que seja um dos principais objetivos, é um desafio em muitas circunstâncias educacionais.

Neste sentido, Moreira (2011) indica a construção do que denomina Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS). Segundo o autor trata-se de atividades cujas características têm potencial para facilitar a aprendizagem significativa dos estudantes. O autor, a partir de alguns princípios que considera fundamentais para a ocorrência de aprendizagem significativa, bem como a partir de uma filosofia educacional, define um conjunto sequencial de procedimentos que caracterizam uma UEPS.

Neste texto, visando apresentar uma estrutura para atividades educacionais em que Unidades de Ensino Potencialmente Significativas poderiam ser subsidiadas por atividades de modelagem matemática, apresentamos resultados de uma pesquisa em que investigamos a ocorrência de aprendizagem significativa de alunos envolvidos com atividades de modelagem em uma unidade de ensino associada ao estudo de equações de diferenças. As atividades foram desenvolvidas no âmbito da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática ministrada por uma das autoras desse texto no quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática.

Na análise das atividades evidenciamos elementos que sinalizam que a UEPS planejada e estruturada com a inclusão de atividades de modelagem matemática atende aos princípios educacionais e metodológicos caracterizados por Moreira (2011). A partir da identificação desses elementos, a análise de quatro alunos nos leva a conjecturar que a inclusão de modelagem na UEPS pode fortalecê-la no que se refere à sua capacidade de promover a aprendizagem significativa dos estudantes.

UEPS - uma configuração para atividades educacionais facilitadoras da aprendizagem significativa

A teoria da Aprendizagem Significativa corresponde a uma proposta psicoeducativa em uma perspectiva cognitivista formulada por David Ausubel na década de 1960. Ausubel entende a Aprendizagem Significativa como um processo de modificação do conhecimento e para tanto, reconhece a importância dos processos cognitivos dos alunos, que ocorrem em uma interação entre as informações novas e a estrutura cognitiva de cada um (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980).

Levando em consideração as ideias já apresentadas pelo próprio Ausubel, Moreira (1999), define a Aprendizagem Significativa como um processo por meio do qual o sujeito que aprende relaciona, de maneira não arbitrária e substantiva, uma nova informação a um aspecto relevante de sua estrutura cognitiva. A não-arbitrariedade indica que a nova informação deve se relacionar com um aspecto relevante da estrutura cognitiva de quem aprende e não com um aspecto arbitrário qualquer. A substantividade significa que é a essência da nova informação que deve ser interiorizada pela estrutura cognitiva e não somente um conjunto de símbolos usados para expressá-la.

David Ausubel ao longo da estruturação de sua teoria, especialmente entre as décadas de 1960 e 1980, identificou condições básicas para a ocorrência de aprendizagem significativa: a utilização de um material potencialmente significativo nas atividades de ensino; a existência, na estrutura cognitiva do aluno, de conhecimentos prévios que permitam o relacionamento do que o aluno já sabe com os conhecimentos novos; e a predisposição positiva do aluno para aprender.

Considerando estas condições, diversos autores defendem que a organização do material de ensino para as aulas visando à aprendizagem significativa dos estudantes deve estar pautada em dois princípios: a *diferenciação progressiva*, princípio segundo o qual as ideias mais gerais e inclusivas da disciplina devem ser apresentadas no início e logo sendo diferenciadas em função dos detalhes e da especificidade; e a *reconciliação integradora*, princípio segundo o qual programar o ensino implica na realização de esforços sérios e explícitos para explorar as múltiplas relações entre conceitos parecidos, destacando as semelhanças e as diferenças importantes, de maneira tal que possam esclarecer inconsistências reais ou aparentes.

Ainda que estes princípios e condições sejam 'orientadores' do planejamento e da execução de atividades de ensino, já em 1973 Joseph Schawb argumentava que qualquer evento educativo envolve quatro elementos fundamentais: o aluno, o professor, o conteúdo e o meio ou contexto social. Assim, a organização de atividades de ensino visando à aprendizagem significativa dos estudantes e que levem em conta estes elementos tem orientado discussões em diferentes áreas de conhecimento e, em particular, na Educação Matemática.

Neste sentido, Moreira (2011) indica a construção do que denomina Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS). Segundo o autor trata-se de atividades cujas características têm potencial para facilitar a aprendizagem significativa dos estudantes. O autor, a partir de alguns princípios que considera fundamentais para a ocorrência de aprendizagem significativa bem como a partir de uma filosofia educacional, define um conjunto sequencial de procedimentos que caracterizam uma UEPS. A figura 1 indica estes princípios bem como as características do domínio conceitual e do domínio metodológico de uma UEPS.

Para operacionalizar o desenvolvimento destas unidades de ensino, o autor caracteriza uma sequência de passos: 1- definição do tópico (conteúdo) a ser abordado na unidade de ensino; 2- criar e/ou propor situações que viabilizem ao aluno externalizar seu conhecimento prévio em relação ao tópico; 3- propor situações-problema em nível introdutório em relação ao conteúdo; 4- apresentar elementos do conteúdo em estudo considerando a diferenciação progressiva; 5- concentrar o foco em aspectos mais gerais, mas fundamentais, no ensino do tópico a ser estudado na UEPS; 6- fazer uma associação entre a diferenciação progressiva visando buscar a reconciliação integradora por meio de um conjunto de atividades e/ou ações.

A avaliação da aprendizagem na UEPS, segundo o autor, deve se dar de forma continuada, especialmente no 6º passo e pode ser tanto formativa quanto somativa, por meio de questões e/ou situações que impliquem compreensão, atribuição de significado e capacidade de transferência.

Levando em consideração que uma condição para que ocorra aprendizagem significativa é a utilização de material potencialmente significativo nas atividades de ensino, e que, segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), resolver um problema pode ser encarado como um meio para promover a aprendizagem significativa, neste texto tratamos de atividades de modelagem matemática como situações de ensino que podem subsidiar unidades de ensino potencialmente significativas.

Modelagem Matemática

De modo geral, uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Neste sentido, realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão fundamentados), são domínios diferentes e que passam a se integrar e, em diferentes momentos, conhecimentos matemáticos e não matemáticos são acionados e/ou produzidos e integrados. A esta situação inicial problemática a literatura costuma se referir como situação-problema; à situação final desejada é associada, de modo geral, uma representação matemática, um modelo matemático.

Figura 1: Caracterização de UEPS (Fonte: Moreira, 2011)

Neste contexto, segundo Galbraith (2012), o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, ao mesmo tempo em que proporciona ao aluno o envolvimento com um problema genuíno e que considere alguma experiência, também visa desenvolver no aluno o que o autor chama de 'infraestrutura intelectual' de modo que os alunos possam se tornar usuários dos conhecimentos (matemáticos) produzidos e resolver problemas de forma independente em diferentes situações dentro e fora do ambiente escolar.

A sua introdução nos currículos escolares, estaria, portanto, associada tanto à possibilidade de tratar de conteúdos curriculares quanto à necessidade de desenvolver nos alunos a aprendizagem de resolução de problemas de sua vida fora da escola, visando alcançar objetivos educacionais complementares. Neste sentido, em algumas situações abordadas por meio da modelagem, os alunos se deparam diante de um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-lo, emergindo assim a necessidade de construir esse conhecimento por meio dessa atividade. Logo, em modelagem, os alunos tanto ressignificam conceitos já construídos quanto constroem outros diante da necessidade de seu uso.

A construção e ressignificação são associadas a ações dos alunos durante as atividades, como: a busca de informações; a identificação e seleção de variáveis; a elaboração de hipóteses; a simplificação; a transição de linguagens; a ativação de conhecimentos prévios; o uso de técnicas e/ou procedimentos matemáticos; a comparação e distinção de ideias; a generalização de fatos; a articulação de conhecimentos de diferentes áreas; a argumentação para expor para outros o julgamento do valor de teorias e métodos usados no desenvolvimento da atividade. Estas ações, de modo geral subsidiam a construção de um modelo matemático.

O modelo matemático, por sua vez, é uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Segundo Lesh (2010), um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. Ainda de acordo com o autor, é possível que o modelo construído para representar uma situação num dado momento sirva, também, para representar outro sistema em um momento posterior.

No que se refere à introdução de atividades de modelagem nas aulas de matemática, embora as discussões estejam centradas no planejamento do professor, se faz notório ponderar que atividades desse tipo também podem ser desafiadoras e não usuais para os estudantes.

É neste contexto que Almeida, Silva e Vertuan (2012) tratam da familiarização do estudante com a modelagem matemática por meio de três diferentes ‘momentos’. Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema juntamente com os dados e as informações usadas para sua investigação e as ações a que nos referimos são, em certa medida, orientadas pelo professor. Posteriormente, em um segundo momento, uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação das hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. Finalmente, no terceiro momento, os alunos, distribuídos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema bem como as ações necessárias para a obtenção da solução e sua comunicação para a comunidade escolar.

As atividades desenvolvidas na UEPS a que nos dedicamos neste texto foram conduzidas segundo esses momentos.

Uma UEPS para o estudo de equações de diferenças: buscando aprendizagem significativa mediante atividades de modelagem matemática

Diversos autores (entre eles Borssoi e Almeida (2004), Almeida e Fontanini (2010), Silva e Kato (2012), Burak e Aragão (2012)), têm investigado o potencial de atividades de modelagem matemática para desencadear a aprendizagem significativa dos estudantes. De modo geral, resultados dessas pesquisas indicam que as características de atividades de modelagem estão alinhadas com os princípios estabelecidos para a ocorrência dessa aprendizagem. Neste texto, entretanto, estamos interessados na investigação da associação de atividades de modelagem com atividades de ensino bem estruturadas como é o caso das UEPS.

Assim, uma UEPS organizada para o ensino de tópicos de equações de diferenças foi desenvolvida em uma sala de aula em nível de graduação, na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, situada no quarto ano da grade curricular do curso de

Licenciatura em Matemática, período noturno, de uma universidade pública do estado do Paraná. A turma era composta de 22 alunos, dos quais 19 frequentaram as aulas no segundo bimestre de 2012, quando se realizou a pesquisa. As aulas foram conduzidas pela segunda autora e acompanhadas pela primeira autora no papel de observadora.

As informações, que constituem os dados da nossa pesquisa, foram captadas por diferentes meios: registros dos alunos (atividades entregues no decorrer da unidade de ensino, sendo arquivos impressos ou eletrônicos); registros da professora (relatórios elaborados após cada aula e ficha de acompanhamento das atividades dos grupos); arquivos de vídeo e áudio (tanto das aulas quanto dos encontros com os grupos para orientação dos trabalhos).

Sobre Equações de Diferenças

Equações de Diferenças podem ser usadas em aplicações de diversos ramos das ciências naturais. Em geral, estas equações descrevem fenômenos ao longo do tempo, que é medido em intervalos regulares de modo a ser interpretado como uma variável discreta. Estas equações são relações de recorrência e podem ser resolvidas usando iterações ou outras técnicas, dependendo de suas características. Segundo Goldberg (1986), a primeira diferença de uma sequência y_n é dada por $\Delta y = y_{n+1} - y_n$, $n \in \mathrm{N}$. A segunda diferença da sequência é: $\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = y_{n+2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$. Generalizando, para qualquer $k \in \mathrm{N}$, a diferença de ordem k é dada por: $\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n$, $n = k, k+1, \ldots$. Chama-se equação de diferenças a uma equação que envolve o termo y_n e as suas diferenças.

A abordagem de equações de diferenças a que nos referimos no texto, realizada por meio de uma UEPS, é mediada por atividades de modelagem matemática.

A Estruturação da UEPS

A UEPS estruturada para a introdução do tópico de equações de diferenças teve duração de doze horas aula, distribuídas em seis encontros de aulas regulares além de dois encontros em horário extraclasse e viabilizou o estudo de tópicos de equações de diferenças de primeira e de segunda ordem mediados por atividades de modelagem matemática. As atividades de modelagem foram incluídas na UEPS seguindo a configuração de familiarização dos alunos por meio de três momentos, conforme descrito na seção anterior. Um mapa conceitual que retrata a estrutura da UEPS está na figura 2.

A estruturação das atividades na UEPS foi orientada pelos princípios indicados por Moreira (2011), contemplando os passos conforme segue a descrição.

Situações iniciais para levantamento de conhecimentos prévios: duas atividades iniciais tinham como objetivo o levantamento de conhecimentos prévios; para o caso desta sondagem em relação à modelagem matemática, as atividades com os alunos foram conduzidas oralmente.

Atividades em nível introdutório: a unidade de ensino se iniciou com a proposição de leituras e de um vídeo sobre a temática *orçamento familiar*, visando desenvolver uma atividade de modelagem matemática do *primeiro momento* (seção 3); o intuito nesta etapa era de colocar os alunos em contato com o processo de modelagem, ao mesmo tempo em que a situação-problema conduzia ao estudo de equações de diferenças.

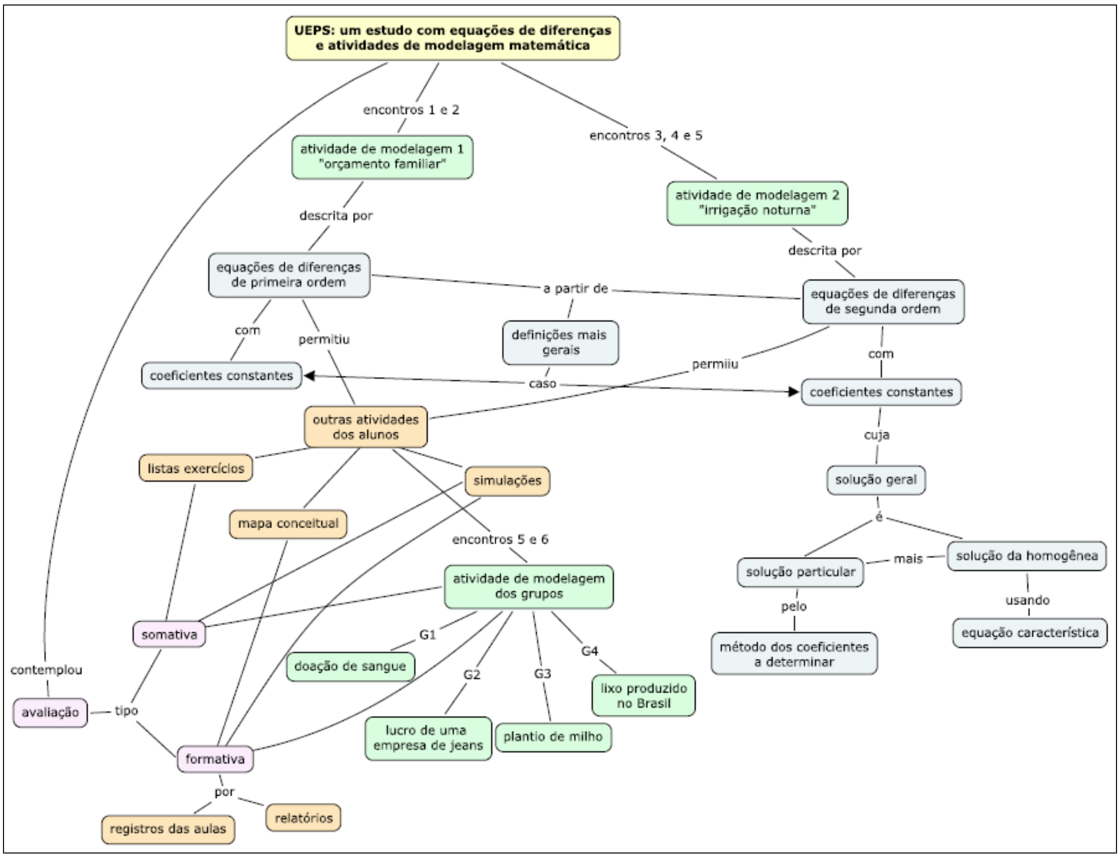

Figura 2: Um mapa conceitual que retrata a estrutura da UEPS

Foco no conteúdo: definições básicas e mais gerais são necessárias para viabilizar a compreensão de equações de diferenças, contudo, a resolução do modelo matemático da situação inicial exigiu conceitos específicos sobre equações de diferenças lineares de primeira ordem, por isso a abordagem desse tópico se fez necessária. Além de voltar à modelagem do *orçamento familiar* e resolver o problema com os conceitos estudados, outras atividades foram propostas a fim de promover o entendimento dos métodos matemáticos, com potencial de serem aplicáveis a diferentes situações-problema.

Avanço em complexidade, do conteúdo matemático e do processo de modelagem: nova situação-problema foi proposta (*irrigação noturna*) de modo a exigir maior envolvimento dos alunos no processo de modelagem, bem como a avançar em complexidade do conteúdo. A partir da nova problemática modelada, considerada do *segundo momento* (seção 3), deu-se a conceitualização de equações de diferenças de segunda ordem de modo geral. O caso particular das equações de diferenças de segunda ordem com coeficientes constantes foi convenientemente abordado para descrever a situação em questão, cuja solução particular foi obtida pelo método das constantes a determinar.

Finalização com atividades colaborativas: em um ambiente de trabalho colaborativo, professora e alunos levaram a cabo a análise de um modelo, revisitando conceitos iniciais e outros mais avançados estudados durante a unidade de ensino; desse modo, discussão, simulação e visualização de resultados permitem significação e ressignificação de conceitos matemáticos, bem como do processo de modelagem; finalmente, a proposição de uma atividade de modelagem do *terceiro momento* (seção 3) foi outra oportunidade de trabalho colaborativo. Assim, surgiu a possibilidade de testar a capacidade de transferência de conhecimentos estudados, sejam matemáticos ou não, para uma situação nova que foi definida, explorada e comunicada pelos alunos sob orientação da professora.

Avaliação na UEPS: atividades contemplando a avaliação formativa e a avaliação somativa foram consideradas durante todo o desenvolvimento da unidade de ensino (ver figura 2).

A Aprendizagem Significativa em UEPS mediadas por Atividades de Modelagem Matemática

A partir das informações coletadas durante o desenvolvimento da UEPS apresentamos alguns elementos que indicam que atividades de modelagem matemática contemplam princípios conceituais e metodológicos que norteiam uma UEPS, conforme caracterizado em Moreira (2011).

A análise dos dados coletados, embora subsidiada pelos referenciais teóricos que fundamentam a pesquisa, vem cercada de compreensão e entendimento das pesquisadoras. As informações obtidas são analisadas em relação às condições básicas para a ocorrência de aprendizagem significativa, bem como em relação à identificação de indícios da ocorrência de diferenciação progressiva e reconciliação integradora á luz do referencial teórico enunciado.

Considerando a extensão possível para este texto, a análise é relativa às ações de quatro alunos, cuja escolha se deu em função do: maior número de presença nas aulas; menor número de pendências quanto às atividades solicitadas e, pertencer a grupos diferentes quanto ao trabalho do terceiro momento. Usando esses critérios foram escolhidos D1, D2, E3 e A4, em que os números indicam o grupo a que cada um pertencia e a letra indica uma referência do aluno no grupo.

As atividades de modelagem foram inseridas na UEPS segundo os momentos da modelagem a que nos referimos na seção 3 e têm propósitos específicos quanto à abordagem do conteúdo e quanto ao processo de modelagem, em comum há o intento de avançar em complexidade à medida que a unidade de ensino se desenvolve.

Primeira atividade – o primeiro momento com a modelagem matemática

Esta atividade foi desenvolvida por todos os alunos presentes na aula. Embora estivessem agrupados, as ações eram definidas em conjunto, entre professora e alunos. Inicialmente os alunos assistiram um vídeo sobre *orçamento familiar* e na sequência leram dois artigos também tratando da temática. A partir dessa inteiração inicial, solicitados a definir um problema para estudar, um dos alunos sugeriu que se procurasse um modelo matemático para estimar o tempo necessário de economia para que ele conquistasse ‘um milhão de reais’.

A temática poderia originar diferentes encaminhamentos e, considerando que este era o primeiro contato dos alunos com a modelagem matemática, foi necessária a intervenção e colaboração da professora visando as ações requeridas para o desenvolvimento da atividade. Para a estruturação dessas ações, a professora fundamentou-se em Bassanezi (2002) e a configuração do que os alunos fizeram está expresso na figura 3.

Considerou-se uma família cuja renda mensal é proveniente de um salário fixo mais o rendimento da poupança do mês anterior e também era preciso considerar o consumo familiar mensal. A partir disso as ações associadas ao desenvolvimento da atividade foram se configurando:

Definição de um problema: como relacionar renda, poupança e consumo de modo a obter um modelo matemático que possa permitir estimativas das finanças de uma família?

Definição de hipóteses: a) o consumo mensal desta família é proporcional à sua renda mensal; b) a diferença entre a renda e o consumo mensal é investida na poupança, mês a mês; c) a poupança permanece com taxa de juros estável, dado o histórico do último ano (conforme avaliação prévia desses números, obtidos em buscas na internet).

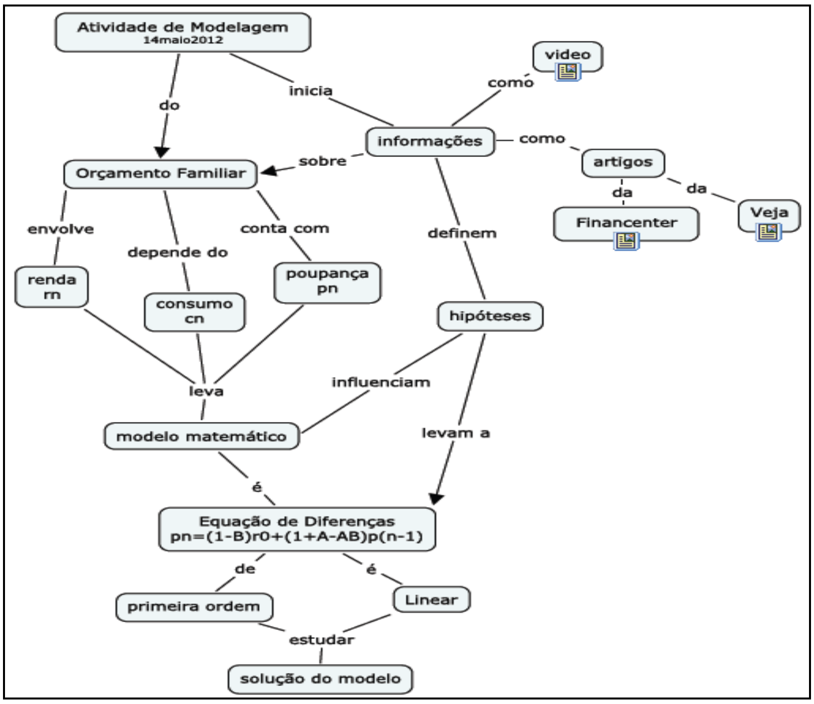

Figura 3: Mapa conceitual da atividade 1

Definição de variáveis e parâmetros: n : tempo, em meses; r_n: renda do mês n em reais; p_n : rendimento da poupança do mês n em reais; p_{n-1}: rendimento da poupança do mês $n-1$em reais; c_n : consumo do mês n em reais; r_0: salário fixo, em reais; p_0 : valor inicial na poupança, em reias; α : taxa de juro da poupança; β : constante de proporcionalidade.

Dedução do modelo matemático: dadas as considerações anteriores, as seguintes relações foram estabelecidas:

Para Poupança: $poup.\ mês\ atual = (poup.\ mês\ anterior) + (sobra\ do\ mês\ atual)$

Para Renda: $renda\ mês\ atual = (salário) + (rend.\ poup.\ mês\ anterior)$

Para Consumo: $consumo\ mês\ atual = proporção(renda\ mês\ atual)$

Assim foi possível escrever:

$$p_n = p_{n-1} + (r_n - c_n); \qquad r_n = r_0 + \alpha p_{n-1} \qquad \text{e} \qquad c_n = \beta r_n, \quad \text{onde } 0 < \beta < 1$$

A partir das relações entre essas expressões chegou-se à expressão:

$$PVI: \begin{cases} p_n = (1-\beta) r_0 + (1+\alpha-\alpha\beta)\, p_{n-1} \\ p_0 \text{ dado} \end{cases} \tag{1}$$

em que α, β e r_0 são parâmetros e p_n e p_{n-1} são as variáveis.

Embora a formulação desse modelo tenha sido orientada pela professora, foi por meio da sua resolução que o estudo de equações de diferenças foi iniciado, sendo necessário para isso o estudo de uma equação de diferenças linear de primeira ordem, $y_n = ay_{n-1} + b$, cuja solução geral foi obtida com a participação dos alunos.

Considerando agora o modelo (1) e os termos da equação de diferenças foi possível escrever: $a = (1-\beta)\alpha + 1$ e $b = (1-\beta)r_0$ e as soluções obtidas para o problema foram:

$$p_n = p_0[(1-\beta)\alpha+1]^n + (1-\beta)r_0 \frac{1-[(1-\beta)\alpha+1]^n}{1-[(1-\beta)\alpha+1]}, \quad \text{ou} \quad p_n = p_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a};$$

$$r_{n+1} = r_0 + \alpha\left[p_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}\right] \quad \text{e} \quad c_{n+1} = \beta\left[r_0 + \alpha\left(p_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}\right)\right]$$

Visualização dos Resultados: simulações com os parâmetros apoiaram a visualização e discussão dos resultados. A figura 4 ilustra um cenário sugerido pelos alunos usando o valor dos parâmetros: $r_0 = 2500,00$, $p_0 = 5000,00$, $\alpha = 0,056$ e $\beta = 0,9$. A partir dessa simulação retornou-se à questão inicial do aluno de saber em quanto tempo poderia obter "um milhão".

Dados			n	pn	rn	cn
r0	2500,00		0	5000,00		
p0	5000,00		1	5252,80	2528,00	2275,20
α	0,0056		2	5505,74	2529,42	2276,47
β	0,9		3	5758,82	2530,83	2277,75
a	1,00056		4	6012,05	2532,25	2279,02
b	250		5	6265,42	2533,67	2280,30
			6	6518,93	2535,09	2281,58
			7	6772,58	2536,51	2282,86
			8	7026,37	2537,93	2284,13
			9	7280,30	2539,35	2285,41
			10	7534,38	2540,77	2286,69
			11	7788,60	2542,19	2287,97
			12	8042,96	2543,62	2289,25
			13	8297,47	2545,04	2290,54
			...	...	...	...
			2080	100055,53	8095,78	7286,20

Figura 4: Os resultados obtidos

Uma simulação usando uma planilha dinâmica manipulada a partir do valor dos parâmetros sugeridos, permitiu avaliar o comportamento dos modelos de p_n, r_n e c_n. A resposta para a questão surgiu por meio dessa simulação, indicando que com estes valores para o salário, a poupança e as taxas de juros desta simulação, isto aconteceria no ano de 2080, conforme indica a figura 4.

Esse momento permitiu resgatar algumas colocações que haviam sido feitas pelos alunos no processo de formulação dos modelos. Por exemplo, quanto à hipótese de que os juros da poupança seriam considerados estáveis, levando em conta o histórico do ano anterior que teve média de 0,56% ao mês, com desvio padrão pequeno. Neste episódio E3, assim como outros colegas, se mostrou incomodada por não atribuir o valor, mas sim usar um parâmetro (α) para representar a taxa de juros no modelo. Quando perguntados sobre o que justificaria manter parâmetros no modelo, D1 e D2 mostraram a mesma compreensão, a de que isso permitiria substituir por outros valores ao final. A4 complementou que assim, se permite a substituição de diferentes valores sem ter que refazer o modelo para dados específicos. Ou seja, parece que A4 percebeu que a dinamicidade proporcionada pelas simulações realizadas com a planilha, permite que se usem diferentes valores para os parâmetros.

Observando a simulação, os alunos perceberam que a planilha é um recurso dinâmico que permite rapidamente visualizar outros resultados. Assim, foi retomada a questão inicial: afinal, quanto tempo é necessário para economizar um milhão de reais? Para isso era preciso fazer $n = 2080$, onde $p_n = 100055,53$, $r_n = 8095,78$ e $c_n = 7286,20$ reais, o que significa que, mantidos os valores dos parâmetros, seriam necessários mais de 173 anos para atingir um milhão.

Nesta oportunidade foi discutido com os alunos o fato de que a planilha permite chegar aos mesmos resultados, tanto pela equação recursiva, em que no passo n a equação depende do valor no passo $n-1$, quanto pelo modelo final, em que a única variável independente é n. Os alunos perceberam que, se os cálculos fossem feitos sem um recurso computacional, a recursividade se torna um processo inviável na medida em que o valor de *n* cresce. Desse modo, a importância de se resolver a equação de diferenças, como a (1), ficou justificada. Ao invés de exibir uma lista com 2080 linhas na planilha, bastava resolver a equação para $p_n = 1000000$, que permite concluir sem muito esforço que $n = 2080$ é a solução.

Resgatar questões como essas durante a simulação e análise do modelo proporcionou a reconciliação integradora, que pôde ser evidenciada nas expressões dos alunos e em comentários sobre como a planilha poderia ajudar na organização das finanças e no planejamento pessoal. Foi sugerido aos alunos a elaboração de uma planilha pessoal como uma forma de revisitarem elementos do processo de modelagem e assim avançar na diferenciação progressiva, fortalecendo sua compreensão de todo o processo.

Segunda atividade - o segundo momento da modelagem matemática

Nesta atividade, que foi desenvolvida durante dois encontros, o intuito foi avançar para o estudo de equações de diferenças de segunda ordem e ao mesmo tempo conduzir a atividade de modo que exigisse maior participação dos alunos nas decisões e encaminhamentos do estudo. Embora as informações em que se basearia a modelagem foram providenciadas pela professora, os alunos ainda poderiam contribuir com outras que alimentariam os parâmetros do modelo no momento da análise e validação.

A atividade iniciou com a leitura de trechos de reportagens sobre a temática *irrigação noturna* em que os alunos, reunidos em pequenos grupos, foram estruturando um problema a investigar a partir das informações. A partir da discussão conjunta dessas decisões dos grupos, foi estruturado um único problema a ser resolvido por todos os alunos: Qual a quantidade de água no solo de uma área cultivada com hortaliças, em determinado tempo, irrigada regularmente durante um período de estiagem, usando o sistema de irrigação por aspersão?

Para o estudo foram consideradas informações relevantes a que tiveram acesso durante a fase de inteiração tais como: a existência de incentivos para a irrigação noturna, em que os produtores recebem redução na fatura de energia elétrica de 60% para uso de energia elétrica no horário das 21h às 06h (podendo ser estendido até às 12h); a racionalização do uso da água e a quase inexistência de perda de água devido à evaporação durante o período noturno. A partir dessas informações foram definidas as hipóteses: H_1: O dia é dividido em dois períodos de 12 horas, sendo que a plantação receberá irrigação apenas no período predominantemente noturno, considerado das 21h às 09h; H_2: no período predominantemente diurno, das 09h às 21h, parte da água é perdida devido à evapotranspiração (em média, cerca de 50%); H_3: Serão desconsideradas perdas de água devido à ação dos ventos e outros fatores H_4: Inicialmente a plantação possui uma quantidade de água; H_5: No período entre 21h e 09h não ocorrem perdas por evapotranspiração.

Para a formulação matemática os alunos iniciaram com a definição de variáveis e parâmetros: n : tempo, em períodos de 12 horas; Q_n : quantidade de água no solo após *n* períodos de 12 horas; Q_0 : quantidade inicial de água no solo às 21h do primeiro dia; $\alpha = \frac{1}{2}$: proporção de água perdida no período diurno; A : quantidade de água irrigada no período noturno.

A dedução do modelo matemático foi realizada em pequenos grupos e a socialização das ideias de cada grupo culminou com a definição da sequência:

$$Q_{n+2} = \begin{cases} \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{2}A, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{2}Q_n + A, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad \text{ou} \quad Q_{n+2} - \frac{1}{2}Q_n = \frac{1}{4}A(3-(-1)^n)\,. \qquad (2)$$

Considerando então os valores iniciais, foi possível escrever:

$$PVI: \begin{cases} Q_{n+2} - \frac{1}{2}Q_n = \frac{1}{4}A(3-(-1)^n) \\ Q_0 = Q_0 \ \text{ e } \ Q_1 = Q_0 + A \end{cases} \qquad (3)$$

Para resolver esse problema de valor inicial seria necessário conhecer métodos adequados para esse tipo de equações de diferenças de segunda ordem com coeficientes constantes. Neste momento foram tratados os aspectos de equações de diferenças de 2ª ordem necessários para resolver esse problema. Somente depois disso os alunos resolveram o PVI (3), chegando à solução

$$Q_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (Q_0 - A) + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (Q_0 - A) + \frac{A}{2}(3-(-1)^n)\,. \qquad (4)$$

A análise do modelo, num primeiro momento, se deu considerando a expressão matemática (4), em que o tempo *n* representa períodos de 12 horas. Pensando no comportamento do modelo ao longo do tempo, puderam calcular o limite quando $n \to \infty$ .e observaram que $\lim_{n\to\infty} Q_n = \begin{cases} A, & \text{se } n \text{ é par} \\ 2A, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$. Assim, embora a conclusão natural seja que o limite não existe, pois para $n \to \infty$, Q_n oscila entre (1) e (-1), esse resultado permite entender o comportamento do modelo. Como o modelo indica, ao longo do tempo a quantidade de água tende a estabilizar em uma quantidade *A* nos períodos pares e em *2A* nos períodos ímpares. A figura 5 é um mapa conceitual de como se deu o desenvolvimento da atividade.

Para além da obtenção desse modelo, os alunos deveriam pensar em cenários que viabilizassem uma interpretação do modelo (4) em relação à quantidade de água no solo. Essa análise se realizou a partir de um cenário com dados da EMBRAPA - Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária. Segundo EMBRAPA (2001), o sistema de microaspersão usa pequenos aspersores ou difusores e a irrigação é feita borrifando-se ou aspergindo como se fosse um pequeno "spray". Os aspersores trabalham com vazões de 70 a 120 L/h e a área irrigada atinge de 4 a 6 m de diâmetro. Assim, usando os dados conforme mostra a figura 7, foi possível fazer simulações e interpretar a questão da quantidade de água no solo de uma área cultivada, problema que os alunos em conjunto haviam definido.

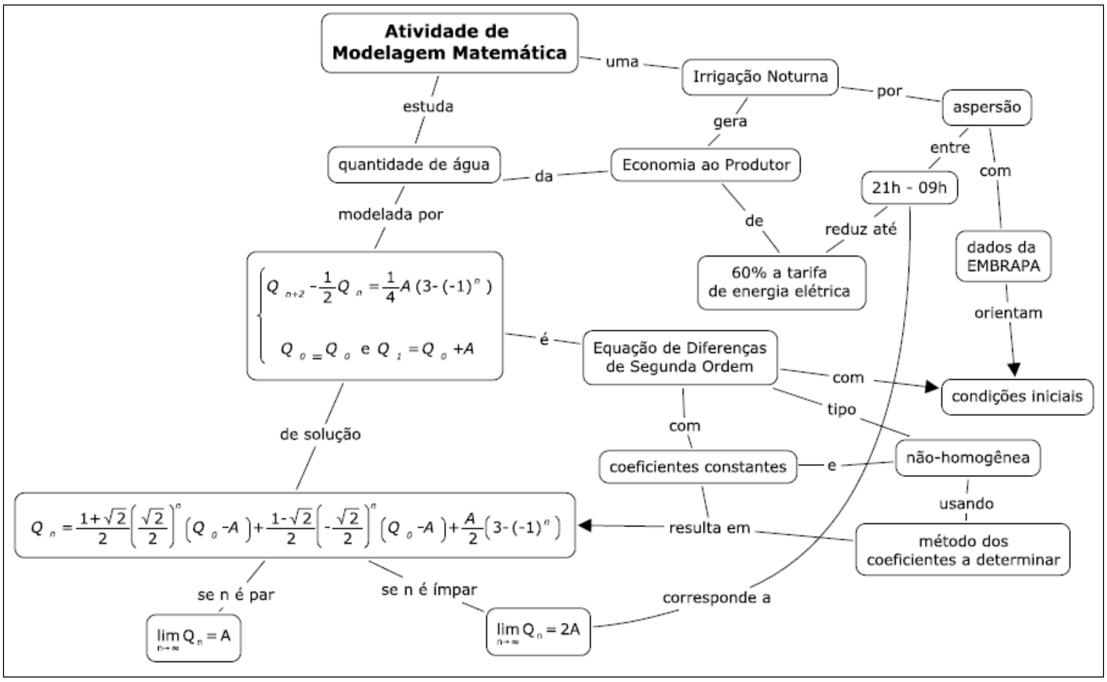

Figura 5: Mapa conceitual da atividade de modelagem sobre irrigação noturna

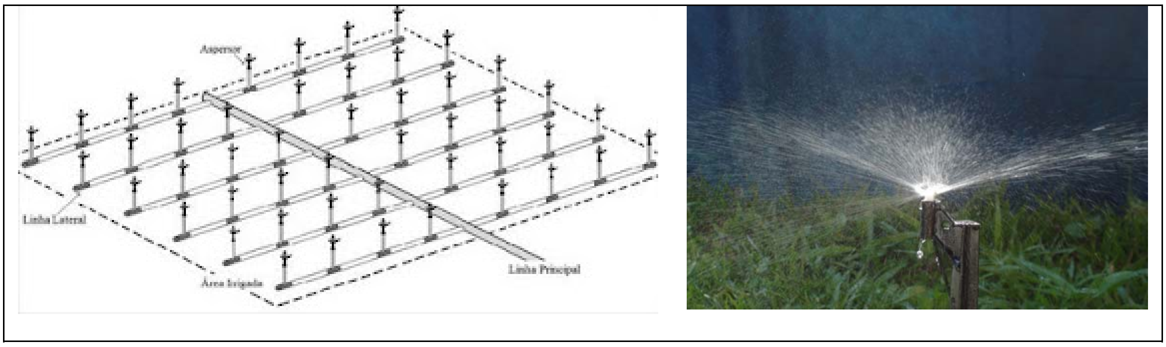

Figura 6: Ilustração de aspersores utilizados em sistemas de irrigação.

Sistema: Microaspersão			filas de 100m	
Aspersor	diâmetro (m)	A: vazão (L/h)	Área irrigada (m²)	Área irrigada (ha)
1	5,00	80	5	0,0005
20	100,00	1600	500	0,05
200	1000,00	16000	5000	0,5

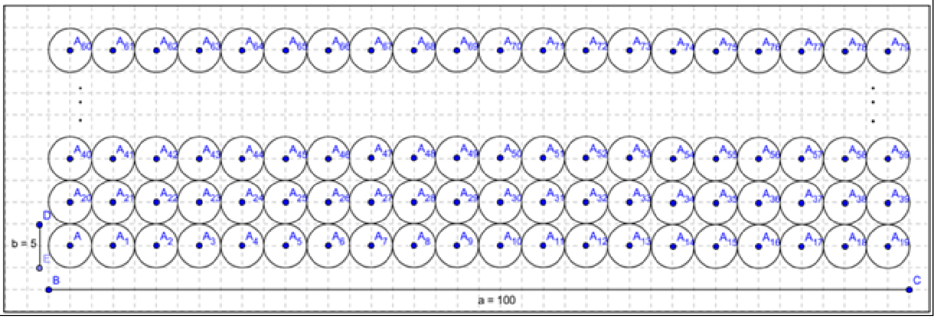

Figura 7: Esquema simplificado para a distribuição dos microaspersores em uma área de cultivo. Os parâmetros do modelo estão baseados em dados da EMBRAPA (2001).

Foi feita uma simulação considerando 20 aspersores e os resultados obtidos constam da figura 8.

A=	1600	L
Q0=	10	L

$$Q_{n+2} = \frac{1}{2} Q_n + \frac{1}{4} A(3 - (-1)^n)$$

$$Q_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (Q_0 - A) + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (Q_0 - A) + \frac{A}{2}(3 - (-1)^n)$$

n	Qn
0	10,00
1	1610,00
2	805,00
3	2405,00
4	1202,50
5	2802,50
6	1401,25
7	3001,25
8	1500,63
9	3100,63
10	1550,31
11	3150,31
12	1575,16
13	3175,16
14	1587,58
15	3187,58
16	1593,79
17	3193,79
18	1596,89
19	3196,89
20	1598,45

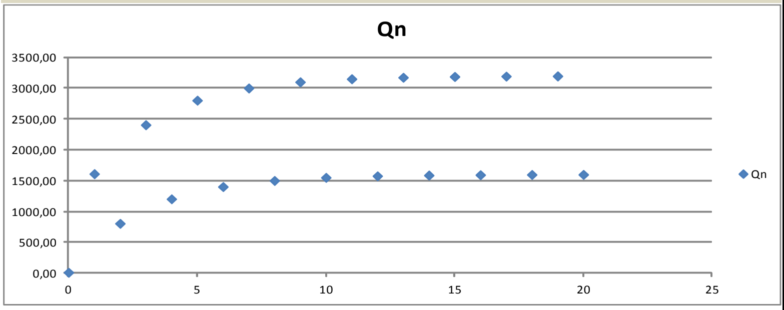

Figura 8: Resultados obtidos por uma planilha eletrônica.

A análise do modelo encaminhada pela professora, contou com a participação dos alunos (D1, D2, E3 e A4) que demonstraram ter refletido sobre a atividade. Alguns trechos da transcrição do vídeo dessa aula ilustram isso.

Professora: Ficou como atividade pra vocês fazerem a análise desse modelo, né?... e, eu gostaria que vocês comentassem o que vocês pensaram a respeito do comportamento desse modelo no decorrer do tempo. Vocês chegaram a fazer essa tarefa?

Alunos: (Silêncio)

Professora: O que podemos falar..., a respeito da quantidade de água no solo? Então, como analisar esse modelo, pensando matematicamente?

D1: pelo limite?

D2: é, por meio de um limite.

E3: Limite.

Professora: É? Vocês pensaram em usar a ideia de limite. Usaram?

E3: Sim.

O conceito de limite é um importante subsunçor que ainda não havia sido requerido. Assim, a professora lançou questionamentos que permitissem os alunos externar seus entendimentos e rever as noções necessárias, como foi o caso, resgatando o uso de limites para sequências numéricas.

Professora: Você (D1) falou: não é um modelo contínuo... e a questão do limite, o que você pensou?

D1: ah, porque se usasse o limite conforme o *n* vai pro..., o *n* muito grande, o limite dela vai ser aquele *A* sobre 2 lá.

Professora: É possível aplicar limite mesmo que a gente esteja falando de um caso discreto? O que vocês me dizem? ... Vocês lembram de ter estudado alguma coisa neste sentido, no decorrer do curso?

Alunos: (alguns alunos sussurram)

[...]

Professora: ... Bom, mesmo que estejamos trabalhando com variáveis discretas, dá pra calcular limite também, lembra que tem limite de sequência, lembra quando estuda séries e sequências... a gente trabalha com limite até pra estudar convergência, divergência da sequência, né.

Alunos: (alunos concordam)

[mais adiante]

> *Professora:* Ok, resta a gente calcular... (vai falando e escrevendo $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{A}{2}(3-(-1)^n)\right]$. Alguns alunos falam junto) e isso, é o quê? Como vocês olham pra esse limite agora?
>
> *Alunos:* (Silêncio)

D2 entregou um estudo em que consta o cálculo do limite da sequência Q_n para n par e depois para n ímpar obtendo resultados corretos, seguidos de gráficos que representam cada sequência separadamente. Fez uma simulação com valores que permitiram analisar a quantidade de água no solo num dado período, conforme conclusão da figura 9.

Logo, após 8 períodos de tempo o solo terá 31,25l de água, considerando que a quantidade inicial seja de 50l, assim como ser 30l a quantidade de água oferecida diariamente pelo sistema de irrigação.

Figura 9: Recorte da atividade entregue pelo aluno D2.

Cabe observar que o aluno (D2) procurou a professora virtualmente para tirar dúvidas quanto a um conceito matemático, como indica a figura 10:

Olá professora!! Estou com uma dúvida aqui. Como eu resolvo o limite de (-1)^n quando n tende a infinito? essa função assume valor 1 quando n é par e -1 quando n é impar. Mas eu não sei como representar a questão do infinito. É isso que falta pra eu terminar de interpretar o modelo que a gente encontrou. Espero resposta! 🙂 Até mais	Em resposta a professora escreveu: Pense em dar uma interpretação considerando o que ocorre com o modelo para valores de n pares e ímpares (tendendo ao infinito) em separado. Teoricamente quando o limite assume valores distíntos (mesmo no infinito) dizemos que ele não existe, porém, ainda assim é possível analisar o comportamento do modelo, não é? Aproveitando... o seu grupo não respondeu ao e-mail que encaminhei na quinta a noite, se puder, dá uma olhadinha e responda. Obrigada

Figura 10: Diálogo postado via chat de uma rede social.

Na aula, oportunamente D2 justificou a necessidade de calcular dois limites separadamente, mostrando ter compreendido a sugestão da figura 10.

> D2: Bom, eu analisei pra *n* par e pra *n* ímpar, porque eu não consegui achar um..., calcular o limite assim com -1 elevado a *n*.
>
> Professora: não conseguiu...
>
> D2: Porque pra..., pra valores pares vai dá um positivo, pra valores ímpares dá um negativo, daí eu não consegui, por isso que eu separei em duas funções.
>
> *Professora:* O que você concluiu? ...não consegue fazer... por quê, qual é o impedimento?
>
> *D2:* O -1 ali.
>
> *Professora:* o que ele provoca nessa expressão?
>
> *D1:* Ele alterna os positivos e negativos (D2 concorda).
>
> *Professora:* Isso, você tem na verdade um limite que oscila né, os valores oscilam dependendo do valor de *n* (E3 fala junto, concordando), não é isso? Como a gente já vem observando que esse é um problema que foi necessário tratar pares e ímpares com expressões separadas, lembram que inicialmente a gente tinha uma expressão pra termos pares outro pra ímpares (fazendo menção à dedução do modelo matemático), a gente pode facilitar um pouco o trabalho e calcular em separado. Então, a gente tem que o resultado disso é o quê? (escreve $\lim_{n\to\infty} Q_n = \begin{cases} \frac{A}{2}(3-1), \text{ se } n \text{ é par} \\ \frac{A}{2}(3+1), \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ enquanto vai falando) Se *n* é par, isso vai ficar...
>
> *Alunos: A*

Professora: Se o n for ímpar (alunos vão falando junto) isso vai dar... $2A$. Bom, e aí, conclusão: o que eu posso falar a respeito do limite?

Alunos: (Silêncio)

E3: que o limite vai pra A e $2A$.

Professora: O que a gente fala quando acontece de o limite não ter um valor, único?

Outra aluna (A2): Sequência divergente.

Professora: Por quê?

Outra aluna (A2): Porque ela tem duas subsequências tem limites diferentes.

Professora: Quando a gente costuma estudar, no estudo de limites, a gente costuma dizer que: o limite existe quando?

E3: Os limites laterais são iguais.

Professora: É, isso se a gente estiver olhando pra um ponto né (E3 concorda). Normalmente o limite existe quando? Quando ele é um número, e que é único, né. Então esse limite não é único, ele provoca uma alternância entre A e $2A$, então, teoricamente a gente fala que esse limite não existe, certo? Esse limite não existe... embora ele não exista ele pode tá falando pra gente, ele pode tá dando informação a respeito do nosso problema, por isso não, não...

E3: não descartar

Professora: não convém que eu chegue aqui diga que o limite não existe, pronto e acabou. Quer dizer, todo problema de modelagem morreu? Não serve, o que a gente fez não serve? Não, ele não existe, mas ela dá indicativo sobre o comportamento do problema, né. Ok, então, o que se pode falar, o que significa que o limite é A e o limite é $2A$ pra ímpar, pra par é A, pra ímpar é $2A$? O que isso significa em termos do nosso problema?

Alunos: (Silêncio)

Professora: Qual que era o problema, o que o modelo diz pra nós? O que o Q_n representa?

E3: O que eu entendi é a quantidade de água...

Professora: quantidade de água no solo...

E3: ...após n períodos de 12 horas.

Professora: Nos períodos pares, quanta água vai estar presente no solo?

Alunos: A.

Professora: e nos períodos ímpares?

D1: o dobro

D2 e outros: 2A.

Professora: ...mas isso quando? Quando n é grande, então, com o passar do tempo o que nós podemos falar a respeito da quantidade de água no solo? Converge, diverge? É estranho falar: Ah, a quantidade de água converge... não é essa interpretação, né. O que a gente pode falar da quantidade no decorrer do t..., num tempo grande? Para os períodos pares: tem uma quantidade... o que é o A mesmo?

Posteriormente quando a professora exibia os resultados de uma simulação (figura 8) D2 fez uma colocação:

D2: Professora, meu gráfico decresceu, não sei porque!".

Professora (após concluir um comentário): então agora nós temos que ver o que aconteceu no estudo de vocês, porque vocês falaram que ficou decrescente...

D2: eu separei em duas funções ..., como se fossem duas funções: uma pra par e outra pra ímpar e deu as duas decrescentes.

Professora: hum, é, a gente tem que olhar como foi feito o estudo em separado, porque, veja: uma equação de diferença é uma equação recursiva, pra eu construir o passo seguinte depende do passo anterior. Como a sequência alterna par e ímpar,..., então tem que tomar cuidado se dá pra fazer essa análise em separado, porque aqui a gente pensou separado aqui (indicando o cálculo dos limites na lousa) mas faz parte de um modelo e na hora de plotar o gráfico foi levado em conta todo, todo o modelo Q_n. Então, tem que olhar se só o finalzinho não tá,... se tá pensado corretamente essa análise final.

De fato, a relação entre os parâmetros A e Q_0 influencia no aspecto do crescimento/decrescimento das sequências pares e ímpares. Se $A < Q_0$ as sequências são decrescentes e se $A > Q_0$ as sequências são crescentes. Em ambos os casos a sequência par converge para A e a ímpar para *2A.*

Desse modo, percebe-se a importância da simulação com recurso computacional ao fazer a análise do modelo, pois, permite a manipulação dos parâmetros e a visualização simultânea dos valores da tabela e do gráfico, ao mesmo tempo em que viabiliza ao aluno compreender o significado dos parâmetros em termos da situação-problema inicial, promovendo a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

Outra forma de buscar indícios de aprendizagem significativa nessa atividade foi por meio da construção de mapas conceituais. O uso de mapas conceituais, segundo Mafra (2011), constitui uma ferramenta eficiente para perceber indicativos de aprendizagem significativa dos estudantes envolvidos em atividades de modelagem. O professor pode utilizá-lo para avaliar o conhecimento do aluno, observando como ele organiza, hierarquiza, relaciona e diferencia os conceitos de determinado contexto de estudo.

Nesse sentido, foi solicitado que os alunos elaborassem um mapa conceitual referente à atividade de modelagem matemática da irrigação noturna, como um elemento de avaliação formativa. Uma sondagem prévia indicou que os alunos já haviam trabalhado com essas estruturas em outras disciplinas, por esse motivo não houve orientação aos alunos sobre a elaboração de mapas. Contudo a professora lançou mão de um mapa para retomar as ações da primeira parte da atividade de modelagem do orçamento familiar (figura 3), ao mesmo tempo em que buscava a reconciliação integradora dos conceitos relacionados ao processo de modelagem.

Em geral, os primeiros mapas elaborados pelos alunos não indicaram relacionamentos incoerentes de conceitos, mas sim estruturas simplificadas, se comparados com um mapa de referência como o da figura 5, sendo assim, insuficientes para representar e expressar mais explicitamente a estrutura cognitiva dos alunos.

Os mapas dos alunos D2 (figura 12) e A4 têm estrutura simplificada, em que os alunos fazem alusão ao encaminhamento da atividade em relação ao processo de modelagem, sem incluir conceitos específicos do conteúdo matemático. Já os alunos D1 e E3 indicam em seus mapas, conceitos tanto do processo de modelagem quanto das equações de diferenças, embora, não apresentem muitas conexões entre os mesmos. A figura 11 exibe o mapa da aluna E3, que permite reconhecer ocorrência de diferenciação progressiva ao que remete à modelagem da situação-problema.

Elementos sinalizadores, observáveis nos mapas, podem mostrar indícios de aprendizagem significativa, segundo Almeida e Fontanini (2010). As autoras elencam os seguintes elementos: o conjunto de conceitos utilizados pelos alunos e as relações estabelecidas; relações com poder de transferência; sinais de diferenciação progressiva e reconciliação integradora; aprendizagem extraconteúdo, e; modificação nos subsunçores. Note-se que a ausência desses sinalizadores não implica diretamente em não ocorrência da aprendizagem significativa.

Embora os primeiros mapas dos alunos tenham se mostrado pouco eficientes como instrumento de avaliação de sua estrutura cognitiva em relação à atividade, estes se mostraram valiosos para a avaliação formativa da professora, de modo que permitiu perceber a necessidade de propor outras atividades que levassem os alunos a externar seus entendimentos, bem como mostrou a importância de se solicitar um novo mapa a partir do primeiro.

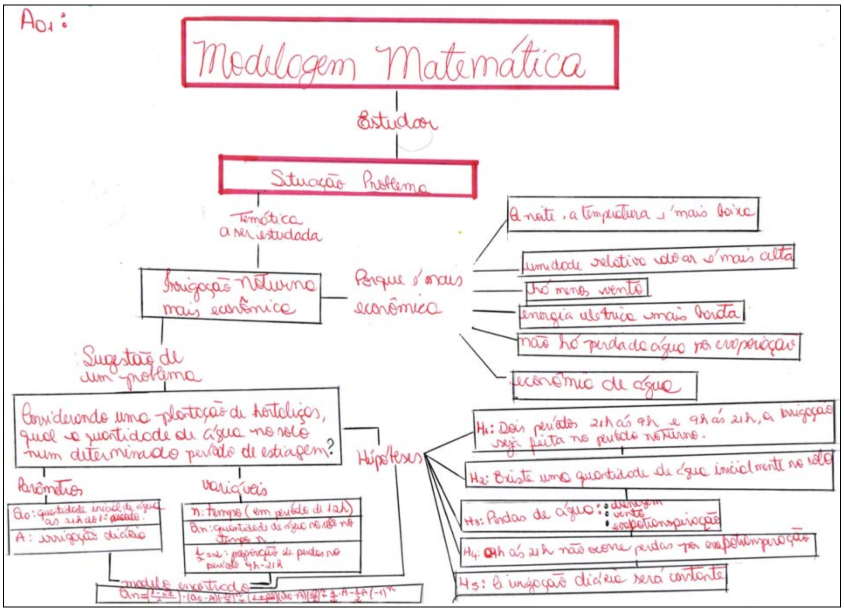

Figura 11: Mapa da aluna E3.

As figuras 12 e 13 representam o mapa inicial e o mapa reformulado do aluno D2. A nova versão tem mais características de mapa conceitual e apresenta mais elementos sinalizadores, como: de conceitos e relações, aprendizagem extraconteúdo e diferenciação progressiva.

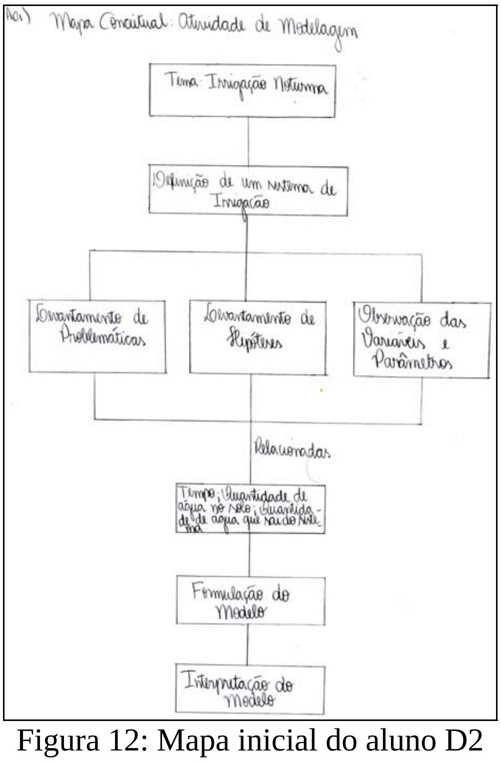

Figura 12: Mapa inicial do aluno D2

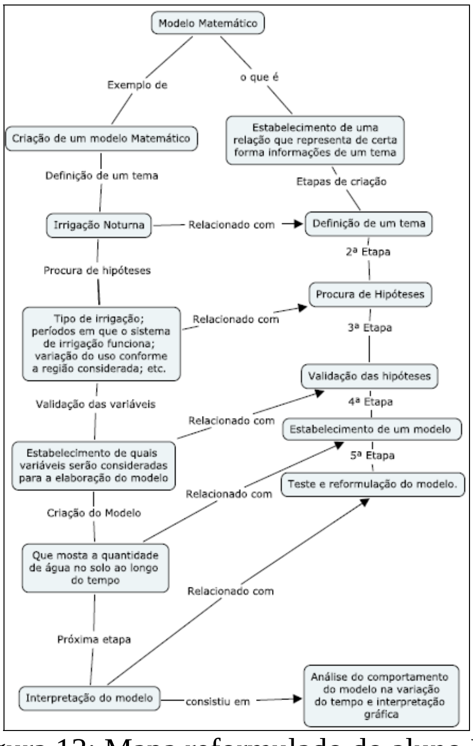

Figura 13: Mapa reformulado do aluno D2

Dialogar com o aluno a partir de seus registros, mais acertados ou menos acertados, oferece uma oportunidade para ele externalizar seu entendimento e avançar em sua aprendizagem. O aluno D2 construiu o novo mapa a partir de orientação da professora, conforme expressa o diálogo que segue:

> *Professora:...* vocês aprenderam a fazer mapa conceitual? Como foi o contato de vocês com mapa conceitual?

D2: Então, a gente fez um na disciplina de estágio, no ano passado, e eu, eu tinha feito um numa disciplina, que eu fiz a tarde aqui na UEL. E era bem nesse esquema que eu fiz mesmo... era um..., você deixava tipo um balãozinho com informação, daí você tentava estabelecer algumas ligações, que dessem de modo geral o que o texto representava, neste caso a atividade de modelagem.

Professora: o teu esquema, na verdade... não caracteriza bem um mapa conceitual, ele tem aspectos de mapa conceitual, mas não, não tão fortes.

D2: Mas, em que sentido assim?

Professora: olha, um mapa conceitual tem que representar o quê? Aquilo que foi desenvolvido, né? Então, no seu caso, você falou sobre o tema, tá aqui; definição de um sistema de irrigação; levantamento da problemática... mas, tá faltando elementos...

D2: Pra ligar você fala?

Professora: ...por exemplo: o modelo.

D2: Ah, entendi.

Professora: Assim, o que foi utilizado de matemática, não está sendo contado aqui.

D2: Uhum. É realmente...

Professora: ele não está assim, ruim, nem nada sabe? Ele está, eu diria que, simples. Ele precisa contar mais para gente entender o que se passou ali, porque olhando assim, dá uma ideia bem vaga, né.

D2: Uhum. Sabe é que eu acho que me prendi, mais a criação do modelo e não tanto à criação do modelo "irrigação noturna". Mas tranquilo, eu dou uma reformulada.

Professora: ... eu vou te mandar um link sobre mapa conceitual. Por exemplo: existe uma recomendação de que se usem palavras de ligação...

D2: É, isso eu já vi.

Professora: Você já viu?

D2: Já vi.

Professora: Você conhece o programinha CMapTools?

D2: Você mandou no e-mail, mas... Eu achei, eu entrei mas achei melhor fazer à mão mesmo.

Professora: Se você começar a usar, você vai ver que é muito interessante, super tranquilo.

D2: É? Não, mas eu vou entrar pra ver e eu encontro lá.

O novo mapa (figura 13) foi elaborado com o uso de um recurso tecnológico específico para a construção de mapas conceituais (CMapTools), que havia sido sugerido pela professora, mas que nenhum aluno da turma conhecia e talvez por isso não o haviam utilizado ainda. Neste caso, se evidencia a predisposição do aluno para aprender, o que possibilitou agregar o aprendizado extraconteúdo do uso de tal recurso, bem como de melhor evidenciar seu entendimento da atividade por meio do mapa.

Atividades de modelagem matemática no terceiro momento – os trabalhos dos grupos

Essas atividades foram desenvolvidas pelos alunos em grupos, sendo que apenas duas das aulas regulares foram dedicadas a seu desenvolvimento. Além disso, entretanto, a professora fez atendimentos a cada grupo em particular em horários alternativos. O último encontro da UEPS foi destinado à comunicação dos trabalhos para turma, sendo essas apresentações gravadas com áudio e vídeo. Dispondo de vinte minutos, cada grupo pôde apresentar a problemática, abordagem matemática e análise do resultado em termos do problema estudado, usando recursos multimídia. Um espaço para que a turma e as professoras fizessem considerações era aberto ao final de cada apresentação. Neste encontro os alunos entregaram atividades que comporiam parte da avaliação na UEPS, bem como uma versão impressa da atividade de modelagem.

Embora não façamos aqui no artigo a descrição detalhada destas atividades a sua incorporação na UEPS foi fundamental, considerando que é o momento em que a aplicação do que já sabiam sobre equações de diferenças poderia subsidiar o desenvolvimento da atividade em cada grupo. O Quadro 1 sintetiza características dos trabalhos dos grupos.

Quadro 1: Aspectos gerais das atividades desenvolvidas pelos grupos no terceiro momento.

	Grupo 1	***Grupo 2***	***Grupo 3***	***Grupo 4***
Título do trabalho	Perspectiva futura de doações de sangue no Hemocentro Regional de Londrina.	Lucro acumulado por uma indústria de calças Jeans	Plantio de Milho	Lixo no Brasil
Problema estudado	O Nosso problema visa criar um modelo que permita estimar o número de coletas internas de sangue no ano n.	Uma fábrica de calças *jeans* produz uma determinada quantidade de peças, gerando um certo lucro a cada mês. Queremos encontrar qual o lucro acumulado por esta fábrica em determinado mês.	Qual a quantidade de semente produzida, em relação ao tempo, para serem tratadas e replantadas a partir de um hectare plantado inicialmente?	Quanto de lixo vamos acumular no Brasil, em relação ao tempo, se não diminuirmos a quantidade produzida e não reciclarmos mais do que reciclamos atualmente?
Equação de diferença formulada	$C_{n+1} = C_n(1+i)$	$C_n = C_{n-1} - ax + (c-b)y - gz - h - i$	$Q_n = Q_{n-1}\alpha\beta\delta$	$L_t = L_{t-1} + 6,8\times 10^{10}(1,0117)^t$
Modelo obtido	$C_n = 6338.(1,025)^n$	$C_n = C_0 + n(-ax + cy - by - gz - h - i)$	$Q_n = Q_0(\alpha\beta\delta)^n$	$L_t = 6,8\times 10^{10}\left[\dfrac{1,0117-(1,0117)^t}{-0,0117}\right]$

O acompanhamento realizado com os grupos durante o desenvolvimento e apresentação dos trabalhos permite tecer considerações sobre como os alunos influenciaram ou foram influenciados pelo trabalho. De modo geral, no que foi possível constatar, a atividade cumpriu o objetivo de ser colaborativa. A presença e interação dos componentes nos encontros para orientação deram indícios disso, bem como a participação de todos na comunicação dos trabalhos, sem que isso fosse imposto como condição, foi outro ponto de destaque.

Particularmente, e de forma muito sucinta, apontamos o papel dos alunos D1, D2, E3 e A4 em seus grupos:

D1: referencial do grupo quanto à percepção da situação-problema sugerida por um colega e do tratamento matemático da atividade de modelagem.

D2: porta-voz do grupo considerando que a interação com a professora ocorreu essencialmente por e-mail durante o desenvolvimento da atividade.

E3: responsável pela organização das ações do grupo exerceu uma liderança discreta e compartilhada. O grupo apresentou um modelo falho para a situação que se propôs a estudar, porém, a aluna assumiu a fragilidade do resultado, bem como o compromisso de que o grupo se reuniria para retomá-lo, o que foi feito com êxito após um novo encontro de orientação.

A4: aluna mais atuante no grupo, com frequência se reportava à professora posicionando quanto aos encaminhamentos do grupo e buscando respaldo. Inicialmente propôs duas problemáticas, convencendo o grupo a optar pela que oferecia maior desafio.

Os registros da dinâmica das atividades dos grupos indicam diversos aspectos que podem amparar considerações sobre a relevância do trabalho colaborativo para a aprendizagem significativa dos alunos na UEPS com atividades de modelagem, todavia, essa abordagem será objeto de outro trabalho.

Considerações Finais

Considerando o quadro teórico exposto neste texto, que caracteriza a modelagem matemática como alternativa pedagógica e enuncia a construção de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas, mostramos aproximações que permitem inferir que atividades de modelagem podem ser integradas em UEPS de forma a proporcionar condições favoráveis à aprendizagem significativa dos alunos. O planejamento e a execução de uma unidade de ensino para o estudo de tópicos de equações de diferenças exemplificam um caso em que há indícios de que esta integração favorece a aprendizagem dos alunos. Neste sentido, entendemos que uma aproximação entre UEPS e modelagem matemática, possibilita potencializar a ocorrência de aprendizagem significativa.

Os princípios que fundamentam as UEPS definidas por Moreira (2011) estão ancorados em elementos e encaminhamentos sintonizados com uma perspectiva educacional que tem como foco a aprendizagem significativa. Os aspectos sequenciais denominados também por Moreira de ‘passos’, apresentam indicações do tipo de atividades e de procedimentos que podem ser desenvolvidos nas unidades de ensino com vistas à ocorrência de aprendizagem significativa. Entretanto, é a partir do passo 3 que o papel da modelagem parece fortalecer em grande medida o potencial da UEPS para esta ocorrência.

A situação-problema em nível introdutório, como é o caso da primeira atividade de modelagem que descrevemos, ao mesmo tempo em que colocou os alunos em contato com os conceitos iniciais em relação às equações de diferenças, o fez de forma a desenvolver nos alunos a intencionalidade e a atitude investigativa. Além de revisitar conceitos da estrutura cognitiva dos alunos, a atividade serviu como um organizador prévio do processo de modelagem.

Outras atividades, como listas de exercícios e elaboração de planilhas dinâmicas, já viriam para oferecer meios para os alunos avançarem, tanto em relação ao desenvolvimento do conteúdo de equações de diferenças quanto em relação à estruturação de modelos mentais, de definição de problemas por si só, na busca por soluções e na realização de trabalhos colaborativos em grupos, aspectos alinhados com as indicações no ‘passo 5’ caracterizado na UEPS.

As orientações e explicações da professora para estas atividades tinham a intenção de apresentar o conteúdo considerando a diferenciação progressiva em que aspectos mais gerais e inclusivos eram discutidos e o encaminhamento para o estudo de aspectos mais específicos era definido para as diferentes atividades de modelagem matemática desenvolvidas.

A segunda atividade que descrevemos no texto, *irrigação noturna*, por sua vez, já corresponde a um estágio do estudo de equações de diferenças em que conceitos mais avançados, seriam introduzidos e formalizados. Por outro lado, os alunos também já estavam mais familiarizados com o encaminhamento de uma atividade de modelagem e assim, uma maior participação pode ser observada. Com esta atividade foi possível buscar uma reconciliação integradora no sentido de que conceitos já estruturados em atividades anteriores precisariam ser adequadamente articulados.

A partir da análise dos quatro alunos que enunciamos neste trabalho, podemos conjecturar que a inclusão de atividades de modelagem na UEPS também a fortalece no que se refere à verificação das condições básicas para a ocorrência de aprendizagem significativa: a) *Material potencialmente significativo:* o material de ensino foi organizado com base em referências bibliográficas adequadas para garantir significado lógico, de modo a permitir a compreensão dos tópicos de equações de diferenças propostos. Ademais, não foi percebida sinalização negativa dos alunos quanto ao material disponibilizado ou utilizado nas aulas. Dessa forma presume-se que o material possa ter sido potencialmente significativo para os alunos; b) *Predisposição positiva para aprender:* a participação ativa dos alunos nas aulas e encontros extraclasse, envolvendo-se no desenvolvimento das atividades, mais intensa em D1, D2, E3 e A4, é indicativa dessa predisposição; c) *Estrutura cognitiva com conhecimentos prévios adequados:* levou-se em conta que os conhecimentos prévios necessários para o estudo das equações de diferenças foram contemplados na grade curricular do curso. De fato, isso não representa garantia de que a estrutura cognitiva dos alunos estivesse adequada, por isso, o levantamento de alguns conhecimentos prévios foi feito inicialmente e outros foram sendo levantados no decorrer da unidade. À medida que o aluno externava ausência imediata ou dificuldades com determinados subsunçores, providências (como inclusão ou retomada de conceitos) iam sendo tomadas para possibilitar transformação na estrutura cognitiva.

Por fim, quanto a UEPS apresentada neste trabalho, podemos considerá-la exitosa, dadas as evidências de aprendizagem significativa, particularmente para os alunos D1, D2, E3 e A4, sobre equações de diferenças e atividades de modelagem observadas, seja por meio dos registros dos alunos nas resoluções das atividades propostas, seja na elaboração e apresentação do trabalho de modelagem.

Referências

Almeida, L. M. W; Fontanini, M. L. (2010) Aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática: uma investigação usando mapas conceituais. Investigações em ensino de Ciências, 15(2), 403-425.

Almeida, L. M. W.; Silva, K. A. P.; Vertuan, R. E. (2012) Modelagem Matemática na Educação Básica**.** São Paulo, Ed. Contexto.

Ausubel, D. P., Novak, J. D.; Hanesian, H. (1980). *Psicologia Educacional***.** Trad. Eva Nick. 2ª edição. Rio de Janeiro: Interamericana.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática***.** São Paulo: Contexto.

Borssoi, A. H.; Almeida, L. M. W. (2004). Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais. Educação Matemática Pesquisa, 6(2), 91-121.

Burak, D.; Aragão, R. M. R. A (2012). Modelagem Matemática e relações com a aprendizagem significativa. Editora CRV, Curitiba , PR.

Galbraith, P. (2012). Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 5(1), 3-16.

Goldberg, S. (1986). *Introduction to Difference Equations: with Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology*. New York: Dover Publications.

Lesh, R. (2010). Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 2(1), 16-48.

Mafra, M. S. (2011) Mapas Conceituais como recurso facilitador de aprendizagem significativa. Dissertação de Mestrado; IFECT- RJ, 128pp.

Moreira, M. A. (1999). *Aprendizagem Significativa***.** Fórum Permanente de professores. Brasília: Ed. Universidade de Brasília.

Moreira, M. A. (2011). Unidades de enseñanza potencialmente significativas - UEPS. *Aprendizagem Significativa em Revista.* V1(2), pp. 43-63. Acesso em 05 fev., 2012, http://www.if.ufrgs.br/asr/?go=artigos&idEdicao=2.

Schwab, J. J. (1973). The practical 3: Translation into curriculum. The School Review, 81(4), 501-522.

Silva, C.; Kato, L. A. (2012). A perspectiva sociocrítica da modelagem matemática e a aprendizagem significativa crítica: possíveis aproximações. *Investigações em Ensino de Ciências*. 17(1), 109-123.

Recebido em: 09.10.12
Aceito em: 11.03.14