

**OS LUGARES DA MATEMÁTICA NA FÍSICA E SUAS DIFICULDADES
CONTEXTUAIS: IMPLICAÇÕES PARA UM SISTEMA DE ENSINO INTEGRADO**
(Relations between Mathematics and Physics and their contextual difficulties: implications for
integrated education system)

Maria Cecília Pereira Santarosa [maria.cecilia@ufrgs.br]

Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre, Brasil.

Resumo

Apresentam-se as descrições de trabalhos documentados na literatura científica que tratam das relações entre a Matemática e a Física em disciplinas introdutórias dos cursos de graduação em Física. Analisam-se as implicações destes estudos para uma pesquisa em andamento que investiga e desenvolve formas alternativas de abordagem dos conteúdos matemáticos da disciplina de Cálculo I, através da integração com conteúdos físicos da disciplina de Física I, com vistas à aprendizagem significativa destes conteúdos. Os artigos analisados foram distribuídos em quatro categorias: Relações entre a Matemática e a Física; Estratégias Articuladoras; Dificuldades com a Aprendizagem da Matemática e Problemas Originários da Formação Básica. Os resultados desta análise aliados aos resultados obtidos em etapas anteriores da pesquisa fornecem algumas diretrizes que podem guiar a metodologia de sistema de ensino integrado.

Palavras-chave: relações entre a Matemática e a Física; aprendizagem da Matemática na Física; formação matemática básica; ensino integrado; aprendizagem significativa.

Abstract

This paper presents descriptions of studies documented in the scientific literature dealing with the relationship between Mathematics and Physics disciplines in introductory undergraduate courses in Physics. We analyze the implications of these studies for ongoing research that investigates and develops alternative ways of addressing the mathematical content of the course of Calculus I, by integration with physical contents of the introductory Physics course aiming at meaningful learning of these contents. The articles analyzed were distributed into four categories: Relations between Mathematics and Physics; Articulating Strategies; Difficulties with Mathematics Learning, and Problems Originating in Basic Education. The results of this analysis combined the results obtained in previous stages of our research provide some guidelines that can guide the methodology for an integrated education system.

Keywords: relations between mathematics in physics; learning of mathematics in physics; training basics mathematics; integrated education; meaningful learning.

Introdução

Resultados apontados na literatura (Artigue, 1995; Ferreyra e González, 2000; Costa e Salvador, 2004; Santarosa e Moreira, 2011) indicam que a aprendizagem dos conceitos matemáticos da disciplina de Cálculo I é mecânica, voltada para a resolução algorítmica dos problemas, sem ênfase nos seus significados frente às situações-problema enfrentadas pelos alunos em sala de aula. Este tipo de aprendizagem pouco ou nada contribui para a formação científica, pois o que é aprendido por memorização é facilmente esquecido, têm poucas relações com a experiência, além de não propiciar algum tipo de poder ou controle sobre o que foi aprendido (Novak, 2000).

Partindo do pressuposto que a aprendizagem mecânica nas disciplinas introdutórias dos cursos de Física pode ser consequência de um sistema de ensino que desarticula e compartimenta conceitos matemáticos e físicos, estamos reunindo no presente artigo subsídios para defender uma forma alternativa de abordagem dos conteúdos matemáticos da disciplina do Cálculo I. Tal abordagem faz parte de uma investigação abrangente que se concretizará através da integração com conteúdos da disciplina de Física I, visando à aprendizagem significativa e tendo como referenciais teóricos as teorias cognitivistas da Aprendizagem Significativa e dos Campos Conceituais.

Iniciamos a mencionada investigação através de um estudo exploratório, do tipo etnográfico, caracterizado pela observação participante e pelas entrevistas em profundidade (André, 1988 e 2005; Bogdan e Biklen, 1994). Durante dois semestres letivos consecutivos (2009/2 e 2010/1), observamos aulas em disciplinas de Física teórica e experimental, na etapa introdutória dos Cursos de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Nossos objetivos foram: a) analisar a forma como a Matemática era transposta, e b) investigar quais situações-problema físicas da Mecânica tem potencial para dar sentido aos conceitos matemáticos do Cálculo I.

Dentre os resultados obtidos (Santarosa e Moreira, 2011), com relação ao ensino da disciplina de Física I, constatamos que a desarticulação entre conteúdos físicos e matemáticos acontece também neste contexto, o que corrobora a hipótese inicial da pesquisa e argumentos apontados na literatura (Cui, 2006; Rex e Jackson, 2001; Santos, 2010). No contexto da Física I, os conceitos matemáticos do Cálculo I são contornados, de forma a não serem necessários na resolução dos problemas; ou senão, são apresentados antecipadamente, com linguagem e notações diferentes e não são mais utilizados. Este achado de pesquisa indicou serem necessárias, e bem vindas, propostas de ensino pautadas nas articulações existentes entre as duas áreas.

Uma primeira tentativa desta integração deu-se em 2011/2, no mesmo contexto investigado na fase exploratória da pesquisa. Com a permissão do professor da disciplina de Física I, foi possível avançar um pouco mais na forma de observação participante, lecionando, em três encontros, os denominados Módulos Matemáticos para a Física e ministrando, em dois encontros, aulas de resolução de exercícios. Dentre as conclusões do estudo, destacamos que: a) os atuais sistemas de ensino da disciplina de Física I não dão possibilidades (em termos de carga horária e da extensão dos programas de ensino) para grandes inovações; b) os interesses dos docentes da Física I (em termos da expectativa com relação à Matemática necessária para a aprendizagem) são opostos daqueles dos docentes do Cálculo I (com relação à forma como a Matemática deve ser apresentada); c) no contexto da Física I os conceitos matemáticos não devem ser trabalhados em sistema de “módulos” (os quais podem induzir à compartimentalização e ao isolamento), mas podem ser apresentados ao longo do desenvolvimento do conteúdo, articulando-se com a Física Conceitual e não sobrepondo-se à ela; d) a presença de um professor de Cálculo I nas aulas de Física I lecionando módulos matemáticos específicos para a disciplina de Física I, pode se tornar um obstáculo para a aprendizagem dos conteúdos específicos da disciplina; e) no contexto da Física I, os alunos estão mais interessados no ensino da Física Conceitual e esperam que a Matemática não seja mais do que uma ferramenta para este fim.

Nesta etapa da investigação torna-se necessário fundamentar estes resultados, através de uma revisão bibliográfica, cuja descrição é apresentada neste artigo. Nossos objetivos são: a) rastrear, documentar e analisar estudos cujas abordagens indiquem algum tipo de relação entre a Matemática e a Física, dentro do contexto da Física; b) verificar possíveis implicações destes estudos para a nossa proposta; c) identificar semelhanças e diferenças em termos de estratégias adotadas e fundamentações teóricas, metodológicas e epistemológicas; d) elaborar novas diretrizes para a metodologia do sistema de ensino integrado proposto.

As questões-foco que guiaram a consulta são: a) quais são os lugares ocupados pela Matemática dentro do contexto da Física? b) de que maneira a comunidade física têm lidado com problemas relacionados com o uso da Matemática? c) quais estratégias têm sido desenvolvidas ou

utilizadas para dar conta destes problemas? d) dentre estas estratégias existe alguma que integre a Matemática com a Física? e) quais são as implicações destes estudos para nossa proposta de pesquisa?

Metodologia

A fim de responder estas questões consultamos artigos científicos, em várias revistas das áreas de Ensino de Física e Ensino de Ciências, no período de 2000 até o primeiro trimestre de 2013. Os artigos analisados foram divididos em quatro categorias: 1) Relações entre a Matemática e a Física; 2) Estratégias Articuladoras; 3) Dificuldades com a Aprendizagem da Matemática; e, 4) Problemas Originários da Formação Básica.

Para tal categorização adotamos os pressupostos teóricos de Bogdan e Biklen (1994), procurando manter o caráter descritivo e interpretativo sugerido para a análise qualitativa dos dados consultados. À medida que selecionamos os artigos, procuramos destacar as formas com que os autores pensam e interpretam o tema destacado.

A categoria “Relações entre a Matemática e a Física” foi dividida em duas subcategorias: Modelos Matemáticos na Física (M) e Modelagem Matemática na Física (MM). Neste caso, consideramos a “Modelagem” como um “processo” e “Modelos” como “fins” obtidos a partir deste processo, conforme o ponto de vista dos autores referenciados no texto.

Dentro da categoria “Estratégias Articuladoras” destacam-se as seguintes subcategorias: Currículos Integrados (CI) e Inovações no Ensino (IE). Da mesma forma, a categoria relacionada às “Dificuldades com a Aprendizagem da Matemática” foi subdividida em: Dificuldades com a Matemática no Cálculo (DMC) e Dificuldades com a Matemática na Física (DMF). Esta última subdivisão se deve às distintas formas de apresentação da Matemática nos dois diferentes contextos.

Finalmente tratamos da categoria que se refere aos Problemas Originários da Formação Básica.

As categorias de codificação, quantidade de artigos analisados em cada categoria, bem como os periódicos a que pertencem é apresentada na tabela 1. Além dos artigos encontrados, houve a necessidade de recorrer a outras fontes para complementar as reflexões: teses de doutorado, dissertações de mestrado, trabalhos apresentados em congressos e livros-texto, que são citados ao longo do trabalho.

Relações entre a Matemática e a Física

Não há como adentrar numa discussão sobre método de “ensino integrado” sem refletir sobre possíveis questões epistemológicas que englobam as relações entre a Matemática e a Física. Dentre elas, destacamos o papel dos Modelos Matemáticos na Física e o papel da Matemática no processo de Modelagem dos fenômenos físicos.

Modelos Matemáticos na Física (M)

Paty (1995) argumenta que a Modelização Matemática na Física pode ser efetuada de diversas formas, desde o aspecto puramente fenomenológico até a axiomatização completa deste fenômeno. A partir de dados empíricos coletados experimentalmente, o físico se propõe a explicar uma distribuição observada; com a ajuda do Cálculo e fundamentado em teorias científicas aceitas,

	Lugares da Matemática na Física		Estratégias Articuladoras		Dificuldades com a Aprendizagem da Matemática		Problemas Originários da Formação Básica	Total de artigos
	(M)	(MM)	(CI)	(IE)	(DMC)	(DMF)		
Periódicos	(M)	(MM)	(CI)	(IE)	(DMC)	(DMF)		
American Journal of Physics			1					1
Cad. Cat. de Ensino de Física	1							1
Cognition and Instruction						2		2
Enseñanza de las Ciencias					1	1		2
Int. Journal of Math. Educ. in Sci. and Tech.		4		2			3	9
Investigações em Ensino de Ciências						1		1
Journal of Computer Assisted Learning		1						1
Physics Education		2				1		3
Revista Brasileira de Ensino de Física		2						2
Revista Mexicana de Investigación Educativa		1						1
Science & Education	2							2
Science Education	1							1
Total	4	10	1	2	1	5	3	26
	14		3		6		3	

Tabela 1: Síntese da distribuição de artigos analisados por categorias, subcategorias, e por periódico.

surgem relações funcionais entre variáveis que podem ser ajustadas no sentido de que uma ou mais delas possam ser deixadas livres. Para que o modelo adquira um alcance físico é necessário que seja

abandonado o estágio de simples representação paramétrica dos dados e que se atinja uma representação mais profunda e mais explicativa do fenômeno (ibid. p.238).

Tais modelos indicam uma forte ferramenta para a resolução de problemas em Física. Podem ser usados, por exemplo, para prever a evolução no tempo de um sistema físico ou retroceder seu comportamento no passado (Quale, 2011, p. 360). No entanto, este processo explicativo parece justificar muito bem a utilização da Matemática no contexto da Física, mas num nível teórico e experimental, a partir de atividades realizadas dentro dos Laboratórios de Pesquisa em Física. E no nível do ensino de Física, como se apresentam os Modelos Matemáticos?

Greca e Moreira (2001) abordam esta questão discutindo e apresentando as relações entre Modelos Físicos, Modelos Matemáticos e Modelos Mentais no nível do ensino de Ciências. Modelo Mental é o conceito-chave da Teoria de Johnson-Laird (1983). É definido como um análogo estrutural representacional dos fenômenos físicos, para os quais o Modelo Físico é uma simplificação, uma idealização. Modelos Matemáticos constituem a parte axiomática, responsável por expressar as deduções e afirmações de uma dada teoria na forma de equações. O Modelo Matemático está implícito e incorporado no Modelo Físico, e os dois são partes constitutivas do Modelo Mental. Para os autores, a compreensão num campo particular da Física pode ser atingida quando for possível prever um fenômeno físico do seu Modelo Físico sem necessitar previamente referir-se ao formalismo matemático. Por si só o Modelo Matemático nada prediz sobre a teoria física (Greca e Moreira, 2001, p. 108).

Fica claro neste trabalho o papel que deve ser ocupado pela Matemática no processo do entendimento de fenômenos físicos, já que a destreza no manuseio de cálculos matemáticos não implica a habilidade matemática necessária para uma formação científica (Pietrocola, 2002).

Podemos interpretar a relação de incorporação argumentada por Greca e Moreira (2001) caracterizando o Modelo Matemático como um conjunto que está contido num conjunto maior, o dos Modelos Físicos. A intersecção destes conjuntos não é vazia, mas o próprio conjunto referente aos Modelos Matemáticos. Isto é, *a Matemática está contida na Física*. O conjunto complementar do conjunto Modelos Matemáticos com relação ao conjunto Modelos Físicos é a parte que não contém a Matemática, mas que está contida no universo físico.

O conjunto dos Modelos Mentais é ainda mais subordinante, por conter os demais. Modelos Mentais podem ser considerados como um universo cognitivo único, onde se processa toda a construção conceitual fenomenológica (ibid. p. 107). A forma que os autores sugerem para lidar com a interpretação de um fenômeno físico trabalhando inicialmente no conjunto complementar dos Modelos Matemáticos em relação ao conjunto dos Modelos Físicos parece amenizar a problemática questão da complexidade matemática apresentada na Física antes mesmo do entendimento conceitual físico, como já foi dito.

Uhden et. al. (2012) sugerem que não haja distinção entre Modelos Físicos e Modelos Matemáticos no ensino da Física e que a imagem qualitativa fenomenológica possa ser considerada como o primeiro estágio de um Modelo Físico-Matemático (ibid. pp. 490-491). Neste caso, podemos entender que tanto o conjunto dos Modelos Matemáticos pode estar contido no conjunto dos Modelos Físicos como vice-versa. Isto é, a intersecção dos dois conjuntos resulta em qualquer um dos dois conjuntos, e porque não dizer que, na visão dos autores *trata-se de um único conjunto*, o dos Modelos Físico-Matemáticos.

Para eles, assim como para muitos outros autores, a maneira como os físicos criam e interpretam expressões matemáticas são diferentes da maneira que um matemático usa a Matemática, sendo a Física mais do que apenas um contexto para as aplicações Matemáticas. Pietrocola (2002) classifica as habilidades matemáticas em técnicas e estruturais, sendo essa última ideal para a boa formação científica. Os autores sugerem o ciclo de modelagem utilizado na área da Educação Matemática para a resolução de problemas físicos (Uhden et. al., pp. 494). Nessa visão,

pode-se pensar a Física matematicamente, ou conceber a Matemática como estruturante do conhecimento Físico (Uhden et. al., 2012; Pietrocola, 2002).

Na perspectiva de Ausubel (1963, 2000) entendemos que a habilidade estrutural estaria mais ligada à aprendizagem matemática significativa, enquanto que a habilidade técnica estaria mais suscetível às aprendizagens matemáticas mecânicas. No primeiro caso o conhecimento significativo está presente na estrutura cognitiva, de forma mais solidificada, por um longo período de tempo, enquanto que, no segundo caso, o conhecimento adquirido pode ser facilmente esquecido.

Novak (1977) sugere que quando não há conhecimentos prévios relevantes na estrutura cognitiva do estudante, talvez a aprendizagem mecânica seja necessária num primeiro momento (apud Moreira, 2006, p.22). Esta é a realidade com que nos deparamos nas disciplinas introdutórias dos Cursos de Física. Neste sentido, a habilidade estrutural almejada vai requerer destreza e capacidade de transferência da Matemática para a Física, a qual pode necessitar passar pela aquisição de habilidades técnicas. Acreditamos que tais habilidades matemáticas estruturais possam ser adquiridas também no domínio da Matemática, através da articulação com a área da Física.

Consideramos que as concepções apresentadas em ambos os trabalhos não excluíam a possibilidade de uma possível integração entre os ensinamentos do Cálculo I e da Física I. Nessas perspectivas ou os conceitos da disciplina do Cálculo I fundamentariam os Modelos Matemáticos necessários para dar conta dos Modelos Físicos, ou os conceitos matemáticos do Cálculo I serviriam como peças estruturantes dos fenômenos físicos, entrelaçando-se a estes, na forma de Modelos Físico-Matemáticos.

Existem posições mais cautelosas com relação ao uso de Modelos Matemáticos na Física. Quale (2011) critica o pressuposto fundamental que impera no ensino das Ciências de que o raciocínio matemático válido conduzirá geralmente à Física válida. Não é difícil entender porque os problemas que possam surgir dessa afirmação tendem a ser ignorados pelos professores de Física. Para o autor, os Modelos Matemáticos frequentemente exibem soluções que não são esperadas, no sentido que elas descrevem uma situação física que difere daquela que um físico pode inicialmente ter pensado quando empregou o modelo. Pode ser que tais soluções inesperadas representem uma situação física realizável. Mas, podem também descrever um sistema não físico, isto é, um sistema que, de acordo com nossa intuição física, simplesmente não existe. O problema que pode surgir deste fato diz respeito à posição epistêmica do realismo na Física: uma teoria matemática que afirma dar uma descrição correta da realidade física não poderia dar origem para tais soluções não realísticas (Quale, 2011, p. 362).

Em outras palavras o autor quer dizer: muito cuidado com a forma com que se está trabalhando a Matemática no contexto da Física. E acrescentaríamos: muito cuidado com o papel de culpabilidade que se está atribuindo à Matemática dentro do contexto da Física. Ela só será considerada um problema se estiver sendo mal desenvolvida e mal interpretada nas suas mais variadas formas e significados, nos diferentes contextos em que está sendo empregada. Nestas circunstâncias, soluções numéricas apresentadas na resolução dos problemas propostos podem descrever sistemas que não são físicos, mas cabe ao professor mediar o processo de elucidação do problema direcionando o aluno para outras formas de interpretações do problema.

Modelagem Matemática na Física (MM)

A ideia de que os ensinamentos da Física e da Matemática possam ser integrados de alguma forma também não é novidade para os estudos que discutem a Modelagem Matemática na Física em favor da aprendizagem.

Gaisman (2006) afirma que o uso da Modelagem Matemática permite o desenvolvimento de metodologias de ensino que promovem a reflexão dos conceitos importantes trabalhados e suas relações com a Matemática. Através de um projeto que investigou as concepções dos alunos com

relação ao estudo do movimento do pêndulo e a forma como constroem seus Modelos Mentais no processo da modelagem, a autora destacou que a maioria dos estudantes investigados não relaciona a Matemática com a Física que conhece. A hipótese central do seu trabalho considera que o conhecimento se desenvolve através da interação do que foi aprendido na escola, entre diversas disciplinas, com o ambiente social (Gaisman, 2006, p. 1209).

Concordamos com a autora no que diz respeito ao interacionismo social entre os sujeitos envolvidos no processo do ensino e da aprendizagem, bem como na observação do desenvolvimento das tarefas propostas aos estudantes. Em termos de conteúdos pesquisados, seu trabalho difere do nosso, pois pretendemos lidar com conceitos mais básicos do Cálculo I e do Pré-Cálculo, relacionando-os com as situações e conceitos da Mecânica Clássica Básica. Logicamente, se assimilados de forma significativa, tais conceitos básicos do Cálculo I e da Física I poderão se apresentar frente às disciplinas mais avançadas, de forma mais elaborada e diferenciada, o que facilitaria novas aprendizagens significativas.

Angell e colaboradores (2008) criticam formas tradicionais do ensino da Física que induzem à fragmentação do conhecimento, à passividade do estudante e à persistência de crenças ingênuas sobre o mundo físico. Através da Modelagem Empírico-Matemática o estudante pode obter o treinamento que precisa para interpretar uma situação física em termos das relações matemáticas. A hipótese é que a partir do fenômeno físico, o aluno constrói múltiplas representações para dar conta das situações: representações experimentais, representações pictóricas, representações matemáticas e representações conceituais, tornando-se mais apto para decodificar a linguagem da Física (ibid. pp.257-258).

Diferentemente da nossa proposta, que foi aplicada entre alunos ingressantes dos Cursos de Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil, a referida pesquisa foi aplicada em Escolas Secundárias da Noruega, por meio de um projeto específico, denominado PHYS21, que proporciona várias atividades de modelagem aos estudantes.

A grande influência deste trabalho no nosso estudo é a forma com que o grupo de pesquisadores apresenta aos alunos diferentes situações da realidade para lidar com os conteúdos físicos e matemáticos necessários.

Também de forma qualitativa Crouch e Haines (2004) realizaram um estudo que analisou as respostas a questionários de múltipla escolha sobre problemas de Modelagem Matemática para estudantes dos cursos de Engenharia, Ciências e Tecnologias. Os resultados demonstram e explicam os problemas vividos pelos estudantes quando têm que utilizar e relacionar Modelos Matemáticos nas aplicações de situações reais. Para os autores, os estudantes são ineficientes neste processo, devendo apoiar-se nas suas próprias experiências. Por isso sugerem que o ensino e a aprendizagem precisam focar de forma mais profunda no processo de abstração e de formulação de Modelos Matemáticos. Além da necessidade de praticar tarefas mais “abertas”, num ambiente mais realístico (ibid. p.204).

Percebemos neste trabalho que a difícil conexão entre o “mundo matemático” e o “mundo real” por parte dos alunos pode ser devido à lacuna cognitiva existente entre estes dois mundos. Entre a Matemática e o mundo real existe um longo caminho a ser percorrido, um importante processo de construção do Modelo Físico citado nos trabalhos anteriores. No entanto, o diferencial deste trabalho é a ênfase nos conhecimentos e experiências prévias no processo de construção do aprendizado. Esta proposta fica mais próxima da concepção de Ausubel (1963, 2000) de que o fator isolado mais importante para uma aprendizagem significativa são os conhecimentos prévios dos alunos.

Alguns importantes trabalhos da literatura científica fazem uso da Modelagem Matemática Computacional na Física (Veit e Teodoro, 2002; Araújo, Veit e Moreira, 2004; Bryan e Fennell, 2009; Graham e Rowlands, 1998; Simpson, Hoyles e Noss, 2006; Sokolowski, Yalvac e Loving, 2011; Alwis, 2000).

Apesar do uso de softwares educativos não ser o foco principal do nosso trabalho, selecionamos, dentre os artigos citados, alguns resultados importantes, que podem justificar nossa preferência por uma abordagem mais analítica, com relação ao uso da Matemática na Física. Entretanto, reconhecemos o importante papel da modelagem computacional no processo da visualização do fenômeno físico e de sua aprendizagem.

No Brasil, trabalhos sobre modelagem com o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) vêm sendo desenvolvidos por um grupo de pesquisadores da área do Ensino de Física da UFRGS. Veit e Teodoro (2002) discutem a importância da Modelagem Computacional no ensino/aprendizagem da Física, apresentando o software Modellus como uma importante ferramenta computacional para este fim. Sua defesa é pelo uso do computador como meio de construção do conhecimento e não apenas como máquina de informação (ibid. p. 87). O enfoque dos autores é nos *Modelos Conceituais*, considerados versões didáticas e epistemológicas dos Modelos Físicos; nos *Modelos Matemáticos*, que são formas de representações que se valem de objetos matemáticos tais como funções, vetores, figuras geométricas, etc.; e, na *Modelagem*, como o processo destas representações (ibid. p. 88). Segundo os autores o poder da linguagem matemática resulta, pois, não da sua capacidade de explicação, mas da sua capacidade de representação, de descrição do processo natural (ibid. p.88).

A implicação deste estudo para o nosso trabalho é o entendimento do papel da Matemática como *representativa e descritiva dos fenômenos físicos*, e o entendimento do processo de Modelagem Matemática como um método que favorece a construção do conhecimento. Outra importante constatação destes trabalhos são as dificuldades dos alunos ingressantes nos cursos das áreas científicas com a falta de conhecimentos prévios em Matemática (alguns se referem aos conhecimentos prévios do Cálculo I) e com a aprendizagem mecânica que pode surgir neste processo. Todos enfatizam a importância de relacionar a Matemática com a Física para dar conta dos problemas físicos, através do processo da modelagem computacional, que permite ao aluno um contato simultâneo com Modelos Físicos e Modelos Matemáticos sem uma maior preocupação inicial com o enfoque matemático analítico. Entretanto, cedo ou tarde, os alunos terão de transpor, de forma analítica, seus conhecimentos matemáticos para dar conta das situações físicas e, até mesmo, para dar conta do manuseio dos recursos computacionais utilizados no ensino, em favor da aprendizagem.

Com relação ao Modellus, por exemplo, apesar de apresentar facilidades na sintaxe da escrita, exige um conhecimento anterior do simbolismo matemático necessário (Veit e Teodoro, 2002). Já as sintaxes de softwares como Mathematica ou Maple, mais utilizados no domínio da Matemática, são mais complexas. Para obter o traçado de uma superfície, por exemplo, é necessário que o aluno tenha entendido de forma analítica a representação geométrica de funções de várias variáveis e também a representação geométrica de curvas planas: domínio, imagem, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos críticos, pontos de inflexão, etc.

Estratégias articuladoras

Nesta categoria destacamos alguns trabalhos que discutem currículos integrados e formas inovadoras de ensino.

Currículos Integrados (CI)

Algumas universidades americanas tentam integrar o ensino da Matemática e o da Física aliando atividades computacionais em Laboratórios de Ensino com aulas teóricas e experimentais, em horários alternativos. É o caso da Universidade de Puget Sound em Washington, USA, que desde 1999 oferece aos alunos um ano de curso que integra o Cálculo e a Física. O objetivo é aumentar a compreensão por temas relacionados com a sincronização entre as duas áreas. O curso é

de oito horas semanais e composto por uma equipe formada por professores de Matemática e de Física. Essa iniciativa culminou na elaboração do livro didático “Integrated Physics and Calculus”, de dois volumes, que apresenta uma sugestão de sincronismo entre os tópicos abordados no ensino integrado (Rex e Jackson, 1999). Não é um curso imposto pelos órgãos institucionais; ao contrário, os alunos podem optar por participar do currículo integrado ou dos currículos tradicionais que continuam sendo oferecidos pelas universidades. Para participar deste curso integrado há a necessidade de noções básicas do Cálculo I, vistas no Ensino Médio.

Apesar de ter sido uma estratégia adotada também por outras Universidades como Portland, Tennessee e New Hampshire, não há resultados publicados com relação ao tipo e ao processo de aprendizagem dos alunos participantes do currículo integrado. Contudo, no caso de Puget Sound, os autores afirmam que no curso integrado os índices de reprovação são menores do que no curso tradicional, além de haver um interesse maior por aspectos relacionados à interdisciplinaridade entre as duas áreas.

A busca por esse sincronismo também é alvo de professores do Grupo Interdisciplinar de Pesquisa e Ensino de Matemática (GIPEM), da Universidade Federal de São Carlos, em São Paulo, Brasil. A fim de melhorar o ensino do Cálculo para os chamados “profissionais do futuro”, incrementou-se o ensino com sistemas de computação algébrica, com modelagem matemática e com o projeto Volta às Origens, que integra o Cálculo I ou III com a Física I ou III, respectivamente, nas turmas de Engenharia de Materiais e Engenharia Química (Costa e Salvador, 2004). Os resultados revelam uma melhoria significativa na motivação e no rendimento geral dos alunos.

Currículos integrados para as Ciências e as Engenharias também foram incrementados no *Union College, New York*. Dunn e Barbanel (1999) apresentam resultados de um sistema de ensino que integra Matemática e Física num curso sobre Eletricidade e Magnetismo e tópicos relacionados do Cálculo. Tradicionalmente, no ensino não integrado, observa-se que os estudantes apresentam muitas dificuldades com as ideias do Cálculo Vetorial, introduzidas com diferentes notações, em diferentes contextos. As conexões apresentadas pelos autores são: Campos Vetoriais e Campos Elétricos; Integrais de Superfície e Fluxo Elétrico; Teorema da Divergência e Lei de Gauss. Dentre as vantagens observadas com relação ao currículo integrado destacam-se: a) a comunicação entre físicos e matemáticos; b) o melhor entendimento do Cálculo no contexto da Física; c) o desenvolvimento da habilidade em aplicar e transferir conhecimentos do Cálculo para a Física (ibid. p.756).

O significado do conceito de “campo vetorial” no contexto da Física também é tema de um projeto de investigação que se realizou na Faculdade de Engenharia da Universidade Nacional de La Plata, na Argentina (Costa et. al.; 2008). Com a utilização do software matemático Maple, o projeto contempla três aspectos fundamentais: o ambiente físico de estudo; a integração curricular e as metodologias de ensino e aprendizagem. A meta principal foi que, a partir da articulação proposta no ensino, o aluno pudesse reconhecer “campos” de uso comum na Física, e interpretar aplicações dos mesmos.

A similaridade com a nossa proposta é que os autores utilizaram a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990) para analisar qualitativamente os resultados do estudo.

O primeiro seminário promovido pelo “Groupe International de Recherche sur l’Enseignement de la Physique” (GIREP), em Udine, Itália, teve como temática “o desenvolvimento formal do pensamento na Física”. Destaca-se o estudo apresentado por Ellermeijer e Heck (2001) sobre possíveis consequências que podem surgir na aprendizagem quando são adotados no ensino ambientes de aprendizagem integrados com tecnologias de informação. Tais problemas são justamente causados pelas diferenças entre o uso de conceitos matemáticos nos dois diferentes contextos: Física e Matemática. Para um ambiente de ensino integrado que utiliza recursos computacionais a equipe de professores deve ter ideia de como vários conceitos tais como

as noções de “variável”, “funções”, “tabelas” e “gráficos”, são usadas nas duas disciplinas (ibid. p.59). A riqueza desse estudo para a nossa proposta se deve à descrição detalhada e exemplificada de noções matemáticas básicas, no nível de Pré-Cálculo, nos dois domínios, da Matemática e da Física.

Inovações no Ensino (IE)

Diferentes abordagens metodológicas aplicadas no ensino, articuladas com outras áreas do conhecimento também são enfatizadas na literatura científica. Keynes e Olson (2000) apresentam um estudo que redesenha a sequência instrucional de um curso de Cálculo para estudantes universitários. O programa institucional tem como principais objetivos: a) oportunizar uma aprendizagem ativa; b) aumentar o contato dos estudantes com o curso, e c) aumentar a exposição dos alunos com aspectos conceituais e visuais do Cálculo. Os objetivos dos instrutores do programa são: d) melhorar a qualidade do material de ensino; e) aumentar a satisfação profissional; f) buscar uma interação pessoal mais efetiva com os estudantes, e g) melhorar a aprendizagem e a retenção dos conceitos e métodos do Cálculo (ibid. 71). As características básicas do programa são: h) alterações na apresentação do conteúdo; i) grupo de trabalho instrucional; j) aprendizagem centrada no aluno; k) atividades colaborativas; l) exploração de ideias matemáticas através do uso de tecnologias (ibid. p.75).

Uma análise quantitativa do desempenho do programa foi feita através da comparação entre um grupo experimental (onde calouros recebiam a instrução na forma inovadora) com um grupo de controle (onde calouros recebiam a instrução na forma tradicional). Também foi realizada uma análise qualitativa a partir dos dados quantitativos e estatísticos obtidos. Os perfis esperados pela faculdade para os alunos participantes do programa são: a) habilidade para manusear com computação; b) habilidade para pensar geometricamente e conceitualmente; c) habilidade para explorar conceitos criativamente; d) habilidade para trabalhar independentemente e com os outros; e) habilidade para comunicar conceitos matemáticos claramente (ibid. p. 79).

Dentre os resultados obtidos com a pesquisa destaca-se o aumento da curiosidade científica entre os estudantes e boa vontade para explorar, o que melhora significativamente a maneira com que eles utilizam Matemática e a usam em outras áreas.

Também intencionamos que nossos estudantes sejam capazes de transferir os conhecimentos matemáticos do Cálculo I frente às situações físicas trabalhadas na Mecânica. Porém, diferentemente do referido estudo, temos investigado este processo no contexto da disciplina de Física I, e não no contexto da disciplina de Cálculo I.

Basson (2002) argumenta que a transferência de conhecimentos entre as áreas da Matemática e da Física é uma das grandes deficiências de aprendizagem causadas por sérios problemas nos ensinamentos de ambas as disciplinas. Para a autora, a partir do conhecimento aprendido, os estudantes deveriam ser estimulados a conectá-los a diferentes contextos (ibid. p.679). Surge mais um estudo que mantém a premissa básica de Ausubel (1963, 2000) de que são os conhecimentos prévios os fatores determinantes para as novas aprendizagens (apud Moreira, 2006). Neste sentido, a proposta da autora assemelha-se à nossa.

No contexto vivenciado por ela (Departamento de Física da Universidade da África do Sul), vários esforços têm sido realizados a fim de estruturar novos currículos para disciplinas de Matemática e Ciências, levando em conta as necessidades do aprendiz (ibid. p.680). A interpretação de um currículo integrado envolvendo Matemática e Ciência é apresentada na figura 1, a qual representa um continuum que se estende até a Matemática pura por um lado e até a Ciência pura por outro lado; na posição central encontra-se a “Ciência Matemática”, lugar onde os assuntos abordados em ambas as disciplinas Ciências e Matemática são respeitados, não havendo superioridade nem inferioridade de uma em relação à outra (ibid. p.681).

Matemática pura	Ciência como parte da Matemática	Matemática e Ciência integradas	Matemática como parte da Ciência	Ciência pura
-----------------	----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	--------------



Figura 1: Continuum representando a integração Matemática-Ciência (ibid. p.681).

A autora exemplifica como poderia se dar o processo da construção do conceito “aceleração” no contexto de ensino integrado sugerido. Inicialmente ela define uma hierarquia de conceitos necessários para o entendimento do conceito “aceleração”: rapidez e velocidade, variação, distância e deslocamento, intervalo de tempo e comprimento.

A mesma discussão quando realizada em termos matemáticos necessários para a conceitualização da “aceleração”, destaca o conceito de “função” e os “aspectos espaciais”. Diferentemente do que é mostrado em livros de texto de Matemática, é apresentada uma sequência de aspectos matemáticos requeridos para introduzir os fundamentos construídos em blocos para: posição, comprimento, ângulo e tempo. Assim, uma nova hierarquia de “blocos construídos” é elaborada, combinando Física e Matemática para lidar com o conceito “aceleração”, conforme figura 2 (ibid. p.688).

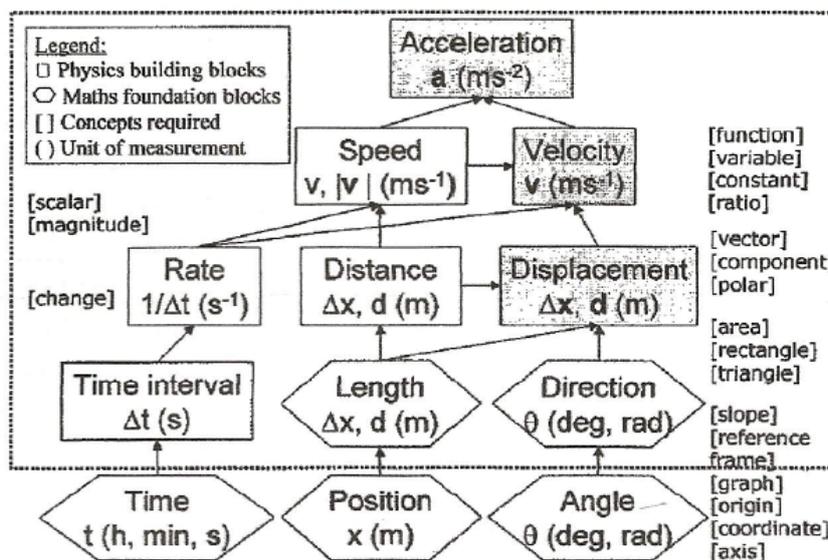


Figura 2: Hierarquia de blocos construídos combinando Física e Matemática para lidar com o conceito “aceleração” (Basson, 2002, p.688).

A autora conclui que muito embora a interação entre os ensinamentos da Física e da Matemática seja uma questão complexa, novas formas de abordagens para integrar as duas áreas devem ser aprimoradas e utilizadas a partir da elaboração de materiais instrucionais que apresentem os conceitos científicos e matemáticos hierarquicamente relacionados. A aprendizagem conceitual cognitiva poderia ser favorecida nestes moldes de ensino (ibid. p.689). Esta tem sido uma das principais metas da nossa pesquisa, considerando que a elaboração de tais materiais instrucionais além de tentar integrar os conceitos físicos e matemáticos, deve ser potencialmente significativo, relacionável aos conhecimentos anteriores presentes na estrutura cognitiva do aprendiz (Moreira, 2006).

Este estudo tem estreitas relações com o nosso, pois enfatiza de uma forma bastante aprofundada as relações da Matemática e da Física no nível da Cinemática, onde os conceitos não são muito bem trabalhados nem no contexto do Cálculo I e nem no contexto da Física I. Consideramos que a descrição matemática apresentada na Cinemática é um dos pressupostos básicos para o

entendimento do conceito de movimento por meio dos conceitos de posição, velocidade e aceleração. Particularmente o conceito de aceleração faz parte do triplo fundamental para o entendimento da Dinâmica, juntamente com os conceitos de força e de massa.

A construção hierárquica em blocos apresentada pela autora pode ser interpretada como um “diagrama de conceitos” ou mesmo como um “mapa conceitual”. Inclusive, da forma como foi construído, podemos também interpretar que os conceitos situados numa posição mais abaixo poderiam ser entendidos como pré-requisitos para a aprendizagem dos demais. Na perspectiva de Ausubel (2000) podemos entender que os fundamentos que sustentam o conceito “aceleração” podem ser interpretados a partir da interação deste novo conhecimento com os conhecimentos prévios enraizados na mente do aluno, com os quais os novos conceitos serão apreendidos, numa relação de subordinação ou de superordenação.

Por outro lado, na perspectiva de Vergnaud (1982, 1988 e 1990) tais conceitos matemáticos e físicos fazem parte do campo conceitual da Mecânica, que pode ser dominado a partir de uma grande variedade de situações-problema tanto da Física como da Matemática, se estivermos interessados na “integração” entre as duas áreas.

Dificuldades com a aprendizagem da Matemática

Esta seção descreve alguns trabalhos relacionados às dificuldades com a aprendizagem da Matemática nos dois diferentes contextos: na disciplina de Cálculo I e na disciplina de Física I.

Dificuldades com a Aprendizagem da Matemática no Cálculo (DMC)

Rezende (2003) defende a hipótese de que grande parte dos problemas de aprendizagem no Cálculo I é essencialmente de natureza epistemológica. Estas dificuldades podem ser entendidas a partir de cinco dualidades consideradas fundamentais: discreto/contínuo; permanência/variabilidade; finito/infinito; local/global; sistematização/construção.

Consideramos que, para propostas de ensino que almejam possíveis articulações entre o Cálculo I e a Física I, devem ser consideradas as dualidades variabilidade/permanência e sistematização/construção. A crítica do autor, e também nossa, é a predominância no ensino superior de uma abordagem estática da Matemática em vez de uma abordagem dinâmica. O interessante para os estudantes da Física, por exemplo, é a construção do conceito de derivada a partir da medida instantânea da variabilidade de grandezas físicas, como posição e velocidade. Nas aulas tradicionais de Cálculo I, em geral, a ênfase é na interpretação da derivada de uma função num determinado ponto como o coeficiente angular da reta tangente à curva, neste ponto. Se nosso objetivo é ensinar o Cálculo I no contexto da Física I devemos levar em conta a questão do movimento, a partir de alguma causa.

Com relação à dualidade sistematização/construção o autor critica o padrão proposto por matemáticos tais como Cauchy e Weierstrass, presente em livros clássicos de ensino de Cálculo I, que obedece a sequência: limite, continuidade, derivada, diferencial e integral. Nessa concepção, os conceitos do Cálculo I são trabalhados no âmbito da justificação formal das definições e das demonstrações dos teoremas. Concordamos com o autor quando afirma não serem as ideias de “velocidade” e “coeficiente angular”, interpretações do conceito de “derivada”. Ao contrário, elas são ideias geradoras do campo semântico da noção de “derivada” (Rezende, 2003) e estão presentes na gênese do Cálculo de Newton. Na perspectiva de Vergnaud (1990) são as situações-problema físicas que podem dar significado aos conceitos matemáticos desenvolvidos na disciplina do Cálculo para estudantes de Física (Moreira, 2004).

Outras pesquisas associadas com a investigação da aprendizagem de conceitos específicos do Cálculo I são apresentadas no livro *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, 1991). Dentre eles destacam-se o trabalho de Theodore Eisenberg sobre as dificuldades de aprendizagem associadas com o conceito de “função” (funções e suas notações associadas não seriam concebidas visualmente pelos alunos); o trabalho de Bernard Cornu sobre as dificuldades com conceito de “limite” (o termo limite favorece uma concepção de algo intransponível e não alcançável); e o trabalho de Michèle Artigue voltado para a área da Análise Matemática.

Acreditamos que, para os estudantes da Física, é significativo apresentar relações funcionais que envolvem grandezas físicas escalares ou vetoriais e mostrar como estas grandezas se articulam para definir equações físicas. Neste sentido, o conceito de “função” poderia ter algum significado para os estudantes. Da mesma forma, a utilização dos números reais no contexto da Física só têm significado quando interpretados em termos de algarismos significativos, que compõem um escalar acompanhado por uma unidade de medida.

O conceito de “derivada” também é foco de investigações. García et.al. (2006) investigaram o desenvolvimento da compreensão deste conceito no último ano do Ensino Médio e primeiro ano da universidade, a partir do desenvolvimento de “esquemas”, proposto por Piaget e García (1983 e 1989). Para os autores os estudantes só terão uma compreensão completa da ideia de derivada quando estiverem aptos a reconhecer e reconstruir as ideias de razão, limite e função em diferentes contextos (García et. al., 2006, p. 96).

Nossa proposta busca a investigação deste processo nas aulas da disciplina de Física I, a partir de situações-problema da Mecânica, na primeira etapa dos Cursos de Graduação em Física.

Dificuldades com a Aprendizagem da Matemática na Física (DMF)

Muitas vezes as dificuldades matemáticas surgem no contexto da Física no momento em que os estudantes têm que lidar com o entendimento dos significados das equações matemáticas que surgem a partir da análise e interpretação dos fenômenos físicos estudados.

Hewitt (2002) defende a hipótese de que a primeira lei de Newton deva ser introduzida anteriormente aos conceitos cinemáticos do movimento. Para ele, a Cinemática constitui-se no “buraco negro” do ensino de Física. Além do que, as equações da Cinemática parecem ao estudante as mais intimidantes do livro (ibid., p.xi). Neste sentido, Feynman (2008) em suas “Dicas de Física” afirma que quanto mais se trabalha em decorar fórmulas na Física, mais longo o trabalho fica, pois existem milhões de fórmulas (ibid., p.52). O autor sugere que, ao invés de tentar decorar fórmulas matemáticas, o estudante deve tentar aprender a entender as inter-relações da natureza (ibid. p.54).

O mais completo estudo encontrado na literatura científica sobre o tema que envolve o entendimento das equações físicas talvez seja o de Sherin (2001). O autor sugere que os estudantes aprendem a entender equações em termos de um vocabulário de elementos que denominou “formas simbólicas” (ibid. p.479). Cada forma simbólica associa um esquema conceitual simples com um padrão de símbolos numa equação.

O autor mostra, por exemplo, que o entendimento da equação $v = v_0 + at$ pode não se estender além das condições sob as quais a equação pode ser usada e como ela pode ser usada. Normalmente a resposta que se obtém de um físico é que tal equação fornece o valor da velocidade v para o caso de uma aceleração constante a . No entanto, a presença de dois termos separados por um sinal de adição geralmente não expressa algum significado particular (ibid. p.480). No seu trabalho ele investiga em quais termos conceituais os estudantes aprendem as equações físicas.

As ideias dele vão ao encontro das nossas, no momento em que intencionamos investigar o significado dos conceitos matemáticos da disciplina de Cálculo I no domínio da Física I. Estes significados certamente não são os mesmos em diferentes contextos. Por exemplo, a mesma

equação apresentada por Sherin (2001) pode ser interpretada por um matemático como uma função linear cuja variável dependente é v e a variável independente é t . O gráfico representativo de tal função seria uma reta que intercepta o eixo das ordenadas no ponto v_0 e o eixo das abcissas no ponto $-v_0/a$. Os termos v_0 e a recebem as denominações de coeficiente linear da reta e coeficiente angular da reta, respectivamente (no contexto da Matemática geralmente se utiliza a notação: $y = ax + b$). Já no domínio da Física os mesmos termos recebem as denominações de velocidade inicial do objeto que se move, e aceleração do movimento, respectivamente. Observamos através deste simples exemplo o quanto uma equação matemática analisada no domínio exclusivo da Matemática nada nos diz a respeito do seu significado no contexto da Cinemática.

Na tentativa de ampliar as hipóteses propostas por Sherin (2001, 2006), Buteler e Coleoni (2012) apresentam um estudo que se refere ao lugar ocupado pelas equações matemáticas na modificação do “conhecimento prévio” dos estudantes. Este conhecimento prévio é denominado por diSessa (1993) como “intuição física”.

Argumentando que é durante a resolução de problemas que os estudantes modificam suas intuições físicas, os autores sugerem que a relação entre intuições físicas e matemática é mais profunda do que aquela proposta por Sherin (2006). Para eles, durante a resolução de problemas as equações matemáticas se subordinam às intuições físicas, as quais parecem decidir quais tipos de equações são aceitas ou não no problema (Buteler e Coleoni, 2012, p. 435). Através de um estudo qualitativo, analisando grupos de estudantes resolvendo problemas físicos, os autores concluem que a modificação das intuições físicas não ocorre de uma vez e para sempre, mas é um processo longo e gradual que exige muitas situações problemáticas, muitas intuições e muitas resoluções requisitando diferentes equacionamentos matemáticos (ibid. p.451).

Os resultados destes trabalhos nos remetem para a necessidade da análise cognitiva no processo da aprendizagem dos estudantes. As equações matemáticas surgem a partir de uma variedade de situações-problema com as quais os alunos têm que lidar para chegarem à solução. No entanto, mais importante do que as soluções finais é tentar mediar os alunos no processo da descoberta das inter-relações entre os conceitos físicos e matemáticos que estão embutidos nestas equações. Na perspectiva da aprendizagem significativa estaríamos colaborando com a assimilação de um conteúdo já firmado na integração entre as áreas da Física e da Matemática.

Izsák (2004) sugere que a área da Educação Matemática necessita estudos mais aprofundados sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de modelagem de situações físicas com equações matemáticas algébricas. A análise qualitativa de um corpo de dados que registrou as ações cognitivas dos estudantes modelando uma situação física sem a instrução direta do conteúdo, mas através de um aparato experimental revelam que: a) os estudantes têm e usam critérios para julgar quando uma expressão algébrica é melhor do que outra; b) os estudantes utilizam outros tipos de conhecimentos para representar o modelo matemático. O autor sugere que novos estudos investiguem a constituição de um material instrucional que possa dar suporte às discussões sobre construção e uso de representações pelos estudantes, para resolverem problemas (ibid. p. 119). Como já dissemos, um dos objetivos da nossa proposta é investigar e elaborar um material instrucional potencialmente significativo para as aulas de Física I, fundamentado na articulação com os conteúdos matemáticos do Cálculo I.

Outro importante estudo sobre dificuldades matemáticas no contexto da Física é aquele apresentado por Torregrosa et. al. (2002, 2005). O trabalho é uma análise da utilização e a compreensão do Cálculo Diferencial no ensino da Física. Segundo os autores os problemas considerados básicos do Cálculo são relacionados com o “movimento”, de forma ampla e o uso do Cálculo na forma de algoritmos de resolução resulta num obstáculo para os estudantes de Física (ibid. p.114). Dentre estes problemas básicos destacam-se: calcular o ritmo da variação, o

coeficiente angular da reta tangente a uma curva dada, e o cálculo de valores máximos e mínimos, bem como calcular somas infinitas.

Utilizando uma análise das concepções históricas sobre o conceito de “diferencial” e um posterior esclarecimento a respeito da utilidade da diferencial no Cálculo I, os autores elaboram quatro indicadores do que consideram uma adequada compreensão da diferencial e do seu uso. Após a testagem destes indicadores concluem que professores e estudantes: a) não sabem quando e nem porque é necessário utilizar a diferencial; b) não conhecem o significado correto da diferencial; c) utilizam de forma operacional e sem compreender a relação entre derivada e diferencial; d) não sabem por que se calcula a integral mediante a antiderivada ou função primitiva; e) limitam o uso do Cálculo à aplicação mecânica de regras; f) têm baixas expectativas sobre a possibilidade de usá-las com sentido; g) valorizam positivamente o uso do Cálculo Diferencial na aprendizagem da Física (Torregrosa et. al., 2002, pp.21-28).

No nosso trabalho não nos detemos especificamente no conceito de “diferencial”, mas abordamos de forma mais geral os conteúdos relacionados com: vetores e trigonometria, noções do Cálculo Diferencial e noções do Cálculo Integral, no contexto da disciplina de Física I, dirigida aos alunos ingressantes dos Cursos de Física da UFRGS, no Brasil.

As representações gráficas de declividades e da derivada, foram investigadas por Christensen e Thompson (2012) através de um estudo exploratório, no contexto da disciplina de Termodinâmica. Os autores criaram um exame cujas questões denominaram “questões físicas com menos física”, para aplicar aos estudantes da Universidade de Maine, Estados Unidos (ibid. p.1).

Por exemplo, com relação à tarefa relacionada ao entendimento da “declividade” em gráficos de funções escalares, menos da metade dos 85% de estudantes considerados aptos mostrou algum raciocínio escrito que justificasse sua resposta. Dentre os que erraram a resposta, aproximadamente 5% confundiram a declividade média entre pontos com a declividade instantânea num ponto. Outro erro típico constatado é a confusão entre o valor da função num ponto com o valor da declividade em cada ponto (ibid. p.2).

Este tipo de erro é bastante comum no contexto da disciplina de Cálculo I. Ele é percebido principalmente quando os alunos têm que obter a equação de uma reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto de coordenadas $(a, f(a))$. A equação é dada por: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. No lugar do termo $f'(a)$ os alunos substituem os valores de $f(a)$ ou até da própria função derivada $f'(x)$ sem substituí-la em $x = a$.

Os autores concluem que os tipos de tarefas matemáticas que os professores de Física esperam que seus alunos façam numa aula de Física são externas às formas de pensamento matemático destes alunos (ibid. p.5). Este é mais um resultado que corrobora a forma isolada com que os ensinamentos das disciplinas Matemáticas e Física atuam. Percebemos que os conceitos matemáticos apresentados de forma isolada não são suficientes para justificar questões físicas que necessitam tais conceitos para serem solucionadas.

Problemas originários da formação básica

Um dos grandes problemas encontrados pelos estudantes ao ingressar na Universidade é a lacuna existente entre a Matemática do Ensino Médio e a Matemática do Ensino Superior. Luk (2004) sugere que esse problema se deve a dois fatores: os circunstanciais (incluem currículos matemáticos, sistema de acesso à universidade, expectativa dos estudantes, avaliação do curso, etc.) e os matemáticos (relacionados à natureza da Matemática). Em termos gerais, na conjuntura universidade-escola há uma mudança do ponto de vista “elementar” para o “avançado”, resultando em lacunas específicas em Álgebra, Cálculo e Geometria, cruciais para os alunos (ibid. p.162). Em sua investigação o autor concluiu que talvez o raciocínio formal frio que tem dominado a Educação

Matemática seja uma falha. Concordamos com o autor quando afirma que critérios de ensino baseados unicamente em estímulo e resposta não permitem uma elucidação de questões de aprendizagem no nível da psicologia cognitiva, imprescindível para o pensamento matemático avançado.

Rezende (2003) destaca que o maior problema com a Aprendizagem Matemática no ensino do Cálculo I encontra-se no Ensino Básico. A evitação/ausência das ideias problemas construtoras do Cálculo no ensino básico de Matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo.

O que parece é que a desarticulação sugerida entre as disciplinas afins de Física e Matemática, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, também está presente no processo de transição do estudante. Na nossa visão, o Ensino Superior segue padrões tradicionalmente behavioristas, cujos conteúdos sequenciais, em outras épocas, entrelaçavam-se com os conteúdos vistos no antigo Científico. Até a década de sessenta, o Ensino Médio brasileiro, tinha duas opções: clássico e científico. A primeira mais voltada para a área humanística e a segunda mais dirigida à área científica. Nesta, no terceiro ano chegava-se a “limites” e “derivadas”. De lá para cá, o Ensino Médio sofreu muitas reformas, onde conteúdos de Matemática e de Física foram sendo automaticamente excluídos dos programas. No entanto, o Ensino Superior continua adotando a mesma sistemática. Então, as dificuldades oriundas da falta de conhecimentos prévios são detectadas exatamente na fase transitória do ingresso na academia e, se não resolvidas ainda nesta etapa, comprometem a aprendizagem ao longo de toda a Graduação.

Hoyles, Newman e Noss (2001) sugerem que dificuldades matemáticas apresentadas no ingresso ao Ensino Superior, no Reino Unido, devem-se ao aumento significativo no número de estudantes ingressantes. Políticas aplicadas ao Ensino Superior, naquele contexto, favorecem a entrada de estudante com uma formação básica insuficiente para dar conta dos conhecimentos de nível superior (ibid. 829). Além do que, os currículos matemáticos dos Cursos de Graduação vêm sendo reformulados de acordo com as necessidades do futuro mercado de trabalho destes estudantes. Os autores sugerem que, devido a este fato, a qualidade de ensino da Matemática nas universidades tem decrescido consideravelmente. Na nossa concepção não há sentido pensar em novas estratégias de ensino sem que o “conteúdo da disciplina” seja o foco principal no processo do ensino e da aprendizagem significativa.

Ainda a respeito das deficiências matemáticas dos alunos oriundas do Ensino Médio e das dificuldades de transição para a Graduação (Anthony, 2000; Cox, 2001), as Instituições de Ensino Superior têm buscado alternativas diversas para lidar com elas. Na UFRGS, o departamento de Matemática oferece semestralmente aos estudantes ingressantes, uma atividade de extensão denominada Pré-Cálculo, onde estes estudantes são colocados frente à nova realidade de transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior, além de reverem conteúdos prévios necessários para a aprendizagem no Cálculo.

Assim como na UFRGS, na Escola de Engenharia da Universidade Presbiteriana Mackenzie existe o Departamento de Propedêutica, específico para lidar com essas dificuldades. Todo semestre letivo são disponibilizadas para os alunos as atividades de Cálculo, Química e Física Zero, a fim de promover a integração destas atividades com as disciplinas profissionalizantes. Os alunos, voluntariamente e paralelamente às aulas, recebem um material didático de apoio, com teoria e prática de exercícios relativos ao conteúdo do Ensino Médio. Através de simulados podem garantir um bônus de até meio ponto na média final da disciplina.

Indiscutivelmente, oportunizar aos alunos um contato inicial com os tópicos da Matemática e da Física é de extrema relevância. Contudo, devemos refletir sobre a importante tarefa do professor nesta etapa de transição, já que nessa fase inicia-se o processo de incorporação de valores, no estudante. Acredita-se que esse primeiro contato não deve condicionar o aluno a uma aprendizagem mecânica.

Síntese

Para cada categoria analisada destacamos os seguintes aspectos:

a) *Relações entre a Matemática e a Física*: a ideia da Matemática como Modelo para a interpretação dos fenômenos físicos têm fortes implicações epistemológicas para nossa pesquisa, já que delimita nosso campo de atuação, fazendo-nos perceber que cabe ao matemático mediar os diferentes significados que a Matemática apresenta nas diversas situações fenomenológicas da Física. Por outro lado, a ideia da Matemática num processo de modelagem nos remete para o fato de que, para estudantes de Física, os conceitos matemáticos devem ser construídos a partir das situações físicas ao invés de serem apresentados unicamente em termos das suas definições;

b) *Estratégias Articuladoras*: no contexto da disciplina de Física, devemos ter cuidado com o excesso de informações matemáticas num ambiente de ensino que enfatiza, num primeiro momento, o entendimento conceitual físico. A Matemática deve tomar sua posição no exato momento em que o fenômeno deva ser abstraído na forma de símbolos e equações matemáticas. Além do que, não deve haver descaracterização de uma disciplina em relação à outra;

c) *Dificuldades com a Aprendizagem da Matemática*: consideramos que estas dificuldades devem ser investigadas e analisadas de formas diferentes em diferentes contextos. O que entendemos como erro matemático cometido pelo estudante no contexto da Matemática pode não ser totalmente um erro no contexto da Física, já que, neste caso a Matemática não surge unicamente como simples equação que deva ser resolvida para que seja obtida uma resposta matematicamente correta. Os resultados numéricos de uma equação não são o fator mais importante no contexto da Física, mas a interpretação dos resultados matemáticos com base no fenômeno físico e ponderando se a resposta é fisicamente aceitável;

d) *Problemas Originários da Formação Básica*: devemos estar atentos ao processo de identificação das experiências e conhecimentos prévios dos nossos alunos, já que é em termos desta “bagagem” de ensino que se apoiarão os novos conhecimentos recebidos. Além do que, lidamos com diferentes formas de aprendizagem, que dependem de como cada aluno lida cognitivamente com o processo de aquisição e retenção das informações recebidas. São diferentes formas de vida num mesmo espaço de ensino. Cada forma de lidar com a informação recebida e cada esquema utilizado para dar conta das situações apresentadas deve ser respeitada, compartilhada e mediada, para uma aquisição significativa dos novos conhecimentos.

Considerações finais

Este texto documentou, descreveu e analisou artigos científicos que têm algum tipo de relação com a pesquisa conduzida pelos autores, que investiga e desenvolve uma nova abordagem de ensino dos conceitos matemáticos da disciplina de Cálculo I, através da integração com os conceitos da disciplina de Física I, visando à aprendizagem significativa destes conceitos.

Esta análise, aliada aos resultados obtidos com o estudo exploratório referenciado na apresentação (Santarosa e Moreira, 2011), fornece novas diretrizes para a reestruturação da pretendida “forma de abordagem integrada de ensino”, cuja primeira versão foi aplicada num estudo preliminar (conforme já foi salientado na Introdução).

Pudemos constatar um grau satisfatório quanto à autenticidade da nossa proposta no que se refere ao emprego de referenciais teóricos, metodológicos e epistemológicos. Há poucos trabalhos relacionados que investigam estratégias de inovações no ensino (dois, conforme a tabela 1), dificuldades de formação básica (três, conforme a tabela 1) e dificuldades de aprendizagem da Matemática no contexto da Física (cinco, conforme a tabela 1). Percebemos que o grande

diferencial da nossa pesquisa é o caráter etnográfico da investigação, realizada ao longo de quatro anos.

Também verificamos que o maior número de estudos referentes à problemática aplicação da Matemática na Física provém, justamente, de pesquisadores da área da Física, sendo poucos os trabalhos relacionados da área da Matemática, realizados por matemáticos. Consideramos este fato como um alerta para a comunidade matemática com relação à forma com que deixamos de articular disciplinas matemáticas com as áreas específicas de formação do aluno, e o quanto isto pode ser prejudicial para o desenvolvimento das diversas habilidades matemáticas dos nossos alunos. Com isto a Matemática pode estar perdendo um imenso campo de investigação que deve interessar muito mais à própria Matemática do que às áreas específicas, já que cabe aos profissionais da Matemática, talvez muito mais do que aos profissionais da Física, investigar as aprendizagens matemáticas frente aos diferentes significados por ela representados.

Referências

- Alwis, T. (1994). Classroom notes on projectile motion with Mathematica. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(5), 749-797.
- André, M.E.D.A. (1988). *Etnografia da prática escolar*. São Paulo: Papirus.
- André, M.E.D.A. (2005). *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional*. Brasília: Liber Livro.
- Angell, C., Kind, P.M., Henriksen, E.K. e O. Guttersrud (2008). An empirical-mathematical modelling approach to upper secondary physics. *Physics Education*, 43(3), 256-264.
- Anthony, G. (2000). Factors influencing first-year student's in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 3-14.
- Araújo, I.S., Veit, E.A. e M.A Moreira (2004). Atividades de modelagem computacional no auxílio à interpretação de gráficos da Cinemática. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26(2), 179-184.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gomez (Ed.), *Ingeniería didáctica em educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y El aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 97-140). Méjico DC: Iberoamérica.
- Artigue, M., Menigaux, J e L. Viennot (1990). Some aspects of student's conceptions and difficulties about differentials. *European Journal of Physics*, 11(5).
- Ausubel, D.P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view*. Netherlands: Kluwer Academy Publishers.
- Ausubel, D.P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune & Stratton.
- Ávila, G. (2006). Limites e derivadas no Ensino Médio? *Revista do Professor de Matemática*, 1(60).
- Basson, I. (2002). Physics and mathematics as interrelated fields of thought development using acceleration as example. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(5), 679-690.
- Bogdan, R. e S. Biklen (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Porto Editora.

- Bryan, J.A. e B.D. Fennell (2009). Wave modeling: a lesson illustrating the integration of mathematics, science and technology through multiple representations. *Physics Education*, 44(4).
- Buteler, L. e E. Coleoni (2012). El conocimiento físico intuitivo, la resolución de problemas en Física y el lugar de las ecuaciones matemáticas. *Investigações em Ensino de Ciências*, 17(2), 435-452.
- Christensen, W.M. e J.R. Thompson (2012). Investigating graphical representations of slope and derivative without a physics context. *Physical Review Special Topics – Physical Education Research*, 8, 023101.
- Costa, I.M. e J.A. Salvador (2004). *Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: Experiências no DM – UFSCar*. In: Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática (EPEM), USP, São Paulo.
- Costa, V.A., Domenicantonio, R.M.Di, Prodanoff, F., Tolosa, E. e V. Guarepi (2008). *Acciones interdisciplinarias entre matemática y física para mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo vectorial*. Livro Digital do VI CAEDI: Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería, Salta, Argentina.
- Cox, W. (2001). On the expectations of the mathematical knowledge of first-year undergraduates. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(6), 847-861.
- Crouch, R. e C. Haines (2004). Mathematical modeling: transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(2), 197-206.
- Cui, L. (2006). *Assessing college students' retention and transfer from Calculus to Physics*. PhD Thesis, Kansas States University, College of Arts and Science. Department of Physics. 187p.
- diSessa, A. (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and Instruction*, 10, 105-225.
- Dunn, J.W. e J. Barbanel (2000). One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics. *American Journal of Physics*, 68(8), 749-757.
- Ellermeijer, T. e A. Heck (2001). Differences between the use of mathematical entities in mathematics and physics and the consequences for an integrated learning environment. In: Michellini, M. and M. Cobal (Eds.). *1º Girep: Developing formal thinking in Physics*, (pp.52-72). Udine: University of Udine.
- Feynman, R., Gottlieb, M.A. e R. Leighton (2008). *Dicas de física: suplemento para a resolução de problemas do lectures on physics*. Bookman.
- Ferreyra, A. e E.M. González (2000). Reflexiones sobre la enseñanza de la física universitaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(2), 189-199.
- Gaisman, M.T. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. *Revista Mexicana del Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240.
- García, G.S-M., Blanco, M.G. e L.C. Salvador (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.
- Graham, T. e S. Rowlands (2000). Using computer software in the teaching of mechanics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(4), 479±493.
- Greca, I.M. e M. A. Moreira (2002). Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics. *Science Education*, 86(1), 106-121.
- Hewitt, P.G. (2002). *Física Conceitual*. Bookman.
- Hoyles, C., Newman, K. e R. Noss (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(6), 829-845.

- Izsák, A. (2004). Students' coordination of knowledge when learning to model physical situations. *Cognition and Instruction*, 22(1), 81-128.
- Johnson-Laird, P.N. (1983). *Mental Models*. Cambridge University Press.
- Keynes, H.B. e O.M. Andrea (2000). Redesigning the calculus sequence at a research university: issues, implementation, and objectives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 71-82.
- López-Gay, R., Torregrosa, M. e J.G. Martí (2002). Análisis de la utilización y comprensión del cálculo diferencial em la enseñanza de la física. In. *Educación abierta. Aspectos didácticos de física y química (física)*, 10, pp. 113-157. ICE de la Universidad de Zaragoza.
- López-Gay, R., Torregrosa, M. e Joaquín (2005). ¿Qué hacen y qué entienden los estudiantes y profesores de Física cuando usan expresiones diferenciales? *Enseñanza de las Ciencias*, 23(3), 321-334.
- Luk, H. S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 161-173.
- Martínez-Torregrosa, J.; López-Gay, R. e A. Gras-Martí (2006). Mathematics in physics education: scanning historical evolution of the differential to find a more appropriate model for teaching differential calculus in physics. *Science & Education*, 15(5), 447-462.
- Moreira, M.A. (2004). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. In. M.A. Moreira (ed). *A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área*, (pp.7-32). Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS.
- Moreira, M.A. (2006). *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.
- Novak, J. D. (2000). *Aprender, criar e utilizar o conhecimento*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.
- Novak, J.D. (1977). *A theory of education*. Ithaca: Cornell University Press.
- Paty, M. (1995). *A matéria roubada*. São Paulo: Edusp.
- Pereira, V.M.C. (2009). *Cálculo no ensino médio: uma proposta para o problema da variabilidade*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, RJ.
- Piaget, J. y R. García (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo XXI.
- Pietrocola, M. (2002). A matemática como estruturante do conhecimento físico. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, 19(1), 88-108.
- Quale, A. (2011). On the role of mathematics in physics: a constructivist epistemic perspective. *Science & Education*, 20(3-4), 359-372.
- Rex, A. e M. Jackson (1999). *Integrated physics and calculus*. Addison-Wesley.
- Rezende, W.M. (2003). *O ensino do cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese de Doutorado, (Doutorado em Educação – Área de Ciências e Matemática). São Paulo: Faculdade de Educação da USP.
- Santarosa, M.C.P. e M.A Moreira (2011). O cálculo nas aulas de física da UFRGS: um estudo exploratório. *Investigações em Ensino de Ciências*. 16(2), 317-351.
- Santos, C.A.P. (2010). *O ensino da física na formação do professor de matemática*. Tese de doutorado. Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, 189p.

- Sherin, B.L. (2001). How students understand physics equations. *Cognition and Instruction*, 19(4), 479-541.
- Sherin, B.L. (2006). Common sense clarified: the role of intuitive knowledge in physics problem solving. *Journal of Research in Science Teaching*, 43(6), 535-555.
- Simpson, G., Hoyles, C. e R. Noss (2006). Exploring the mathematics of motion through construction and collaboration. *Journal of Computer Assisted Learning*, 22, 114-136.
- Sokolowski, A., Yalvac, B. e C. Loving (2011). Science modeling in pre-calculus: how to make mathematics problems contextually meaningful. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.
- Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Torregrosa, J.M., Gay, R.L. e A.G. Martí (2006). Mathematics in physics education: scanning historical evolution of the differential to find a more appropriate model for teaching differential calculus in physics. *Science&Education*, 15, 447-462.
- Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M. e G. Pospiech (2012). Modelling mathematical reasoning in physics education. *Science&Education*, 21(4), 485-506.
- Veit, E.A. e V.D. Teodoro (2002). Modelagem no ensino/aprendizagem de física e os novos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 24(2), 87-96.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In. Hiebert, H. e M. Behr (Eds.), *Reserarch agenda in mathematics education. Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, p. 141-161.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.
- Vergnaud, G. (1993). Teoria dos Campos Conceituais. In L. Nasser (ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática*, Rio de Janeiro (pp. 1-26).

Recebido em: 01.10.13

Aceito em: 03.12.13