Investigações em Ensino de Ciências – V15(2), pp. 259-274, 2010

CRIANÇAS, ALGORITMOS E O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL
(Children, algorithm and the decimal numeral system)

Clélia Maria Ignatius Nogueira [cminogueira@uem.br]
Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática
Universidade Estadual de Maringá - UEM
Marcela Boccoli Signorini [sig.marcel@hotmail.com]
Professora do Ensino Fundamental
Secretaria de Educação do Estado do Paraná – SEED - PR

Resumo

Embora vários estudos em Educação Matemática abordem possíveis problemas com o estudo dos algoritmos no ensino de aritmética nas séries iniciais, essas discussões ainda não se esgotaram. Nessa perspectiva, este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como proposta investigar se o ensino da aritmética, com ênfase nos algoritmos das operações fundamentais, contribui para a construção do conhecimento matemático, particularmente do Sistema de Numeração Decimal. Para alcançar este objetivo foram entrevistadas, utilizando o método clínico crítico piagetiano, vinte crianças de uma escola pública. A análise dos resultados indica que elas reproduzem mecanicamente as técnicas operatórias convencionais sem perceber a relação existente entre esse dispositivo e os princípios e as propriedades do Sistema de Numeração Decimal.
Palavras-Chave: Educação Matemática; algoritmo; Sistema de Numeração Decimal.

Abstract

A large number of studies in Mathematics Education approach some possible problems in the study of algorithms in the early school years of arithmetic teaching. However, this discussion is not exhausted. In this feature, this article presents the results of a research which proposed to investigate if the arithmetic's teaching, with emphasis in the fundamental operation's algorithm, cooperate to build the mathematics knowledge, specifically of the Decimal Numeral System. In order to achieve this purpose, we interviewed, using the Piaget Critique Clinical Method, twenty students from a public school. The result's analysis indicates that they mechanically reproduce the regular algorithm's techniques without notice the relations between the techniques and the principle and the Decimal Numeral System's properties.
Key words: Mathematics Education; algorithm; Decimal Numeral System.

Introdução

Para compreender as questões que nos intrigaram e motivaram a realização da pesquisa aqui relatada é necessário voltar ao ano de 2003 quando foi implantado nas escolas públicas do estado do Paraná, o projeto denominado Sala de Apoio à Aprendizagem. Naquela ocasião, uma das pesquisadoras trabalhou, em contraturno, com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental. As crianças selecionadas para compor a referida sala eram alunos que, segundo diagnóstico do professor regente da turma, apresentavam defasagem no aprendizado dos "conteúdos" de matemática das séries anteriores (1ª a 4ª série).

Uma parcela considerável dos alunos que era selecionada para participar da sala de apoio, apesar de já ter cursado quatro anos do ensino fundamental, ainda apresentava dificuldades, ou não se sentia segura, na resolução das operações aritméticas, isto é, não dominava as técnicas operatórias, e poucos manifestavam outras estratégias de resolução. Diante desse fato, boa parte do tempo que permaneciam na sala de apoio era empregada na cansativa tarefa de resolver "contas", o que despendia esforço, da parte da educadora, com intuito de sanar as lacunas existentes, e das crianças, na tentativa de aprender as técnicas operatórias. O trabalho desgastava tanto a professora quanto os alunos, que, depois de algum tempo, perdiam o interesse em participar das aulas de apoio, lhes era cansativo ficar repetindo "contas" que lhes pareciam sem sentido.

Ao fazer uma reflexão sobre essas aulas, a professora se perguntava: para que seria importante o domínio do algoritmo das operações aritméticas elementares, uma vez que as calculadoras acessíveis a todos, executa com maior rapidez e precisão os cálculos necessários? Será que somente utilizar os algoritmos das operações aritméticas elementares contribui para o desenvolvimento do raciocínio? Certamente estas questões já estão praticamente respondidas, uma vez que seguir e respeitar regras contribui apenas para manter o aluno passivo frente ao aprendizado e dependente da aprovação de outros, isto é, não o incentiva a ser questionador e muito menos educa para autonomia. Então, a importância do trabalho com os algoritmos deveria estar na própria construção do conhecimento matemático. Mas, para a construção de qual "conceito" especificamente, a árdua tarefa de desenvolver os algoritmos poderia contribuir? Com a compreensão dos significados das operações ou utilidades no mundo real, seguramente não, pois nada nos algoritmos se relaciona diretamente com as operações e as calculadoras resolvem as necessidades cotidianas.

Diante dessa reflexão e do fato de que os algoritmos são procedimentos fundamentados nos princípios e nas propriedades do SND, é legítimo indagar se o objetivo implícito neste intenso trabalho seria consolidar ou mesmo completar a compreensão deste sistema pelas crianças.

Várias vezes estas indagações, bem como a de outros professores, no tocante ao ensino da matemática, foram temas de discussão do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GIEPEM), vinculado ao Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, da Universidade Estadual de Maringá, do qual ambas as autoras fazem parte. Neste grupo, um dos temas abordados foram as avaliações institucionais sobre o ensino de matemática no Brasil e ficamos intrigadas com os resultados do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) segundo o qual, em 2003, 11,5% dos alunos, por eles avaliados, não conseguiam transpor, para uma linguagem matemática específica, comandos operacionais elementares compatíveis com a série, ou seja, não identificavam uma operação de soma ou subtração envolvida no problema ou não sabiam o significado geométrico de figuras simples.

Na experiência vivenciada por uma das autoras, enquanto professora de uma sala de apoio à aprendizagem, foi possível constatar que as crianças que não conseguiam resolver as "contas" também não compreendiam o Sistema de Numeração Decimal. Por exemplo, ao subtrair 19 de 23, não sabiam explicar o que significa o "empresta um"; para elas não estava claro que o algarismo "dois" do número vinte e três na verdade eram duas dezenas, logo, o que se "empresta" é uma dezena. Mesmo na operação de adição, o "vai um" não era entendido por elas, pois não eram capazes de explicar o que significa essa ação.

Mas seria a recíproca verdadeira? Crianças que conseguem "resolver contas" compreendem os princípios e as propriedades do SND, ou seja, conseguem perceber a relação existente entre os algoritmos de adição e de subtração e os princípios e as propriedades deste sistema?

Foi estabelecido então, o problema da pesquisa: Há construção do conhecimento matemático, particularmente do Sistema de Numeração Decimal, a partir do ensino da aritmética, com ênfase nos procedimentos algorítmicos?

Para a consecução deste objetivo, foram estabelecidos dois outros, mais específicos: investigar se a utilização dos algoritmos, na resolução das operações de adição e subtração, permite a flexibilidade de pensamento da criança, ou seja, se além de empregar os procedimentos convencionais ela também utiliza outras estratégias, como, por exemplo, o cálculo mental, na resolução das operações de adição e subtração; e investigar se a criança, ao resolver os algoritmos de adição ou subtração, percebe os princípios e as propriedades do SND implícitos nesse procedimento.

Os procedimentos metodológicos foram: levantamento dos postulados teóricos do Método Clínico Crítico; levantamento dos postulados teóricos do SND; estabelecimento das estratégias de investigação; seleção dos 20 sujeitos que participaram de nosso estudo e do local; análise do livro didático adotado pela escola e aplicação das provas matemáticas.

O Método Clínico Crítico

A opção pelo Método Clínico Crítico de Jean Piaget como orientação teórica e metodológica à investigação se deu em função dele permitir ir além das informações contidas em um instrumento de coleta de dados, possibilitando a livre conversação entre as pesquisadoras e a criança entrevistada, dito de outra forma, pela necessidade de englobar a idéia do subjetivo, considerando não apenas o que é verbalizado pelo entrevistado, mas também, a aquilo que é omitido por ele.

Segundo D' Ambrósio (2004, p.21), a pesquisa qualitativa, também chamada de Método Clínico, "é o caminho para escapar da mesmice; pois lida e dá atenção às pessoas e às suas idéias, procura fazer sentido de discurso às narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos".

A entrevista é apoiada por um roteiro flexível, adaptável a cada criança, que serve apenas para orientar o pesquisador, evitando que este se desvie do foco de estudo. A cada resposta dada pela criança, surge uma nova hipótese, e é essa seqüência de perguntas e respostas que torna a entrevista coerente (Leite, 1987).

O pesquisador deve estar atento ao tipo de linguagem a ser utilizada durante a entrevista. Ela deve ser simples e definida anteriormente, a fim de não tornar-se um obstáculo ao entendimento da situação que se pretende verificar. "Por exemplo, se o sujeito utiliza o termo "bicho", é mais aconselhável que o examinador empregue esta palavra do que a palavra "animais", que poderia ser desconhecida do sujeito e dificultar seu desempenho" (Carraher, 1989, p.27).

Outro ponto a ser considerado é a necessidade de se reformular uma questão feita para a criança caso esta não consiga entender o que lhe está sendo proposto. Desse modo, é indispensável saber antecipadamente que tipos de perguntas serão aplicados, para que estas não levem a criança a dar respostas dirigidas. Caso a resposta não seja clara, o método permite que o pesquisador peça à criança a apresentação de uma justificativa a respeito do exposto.

A maneira sugerida para a apresentação dessa justificativa é a contra-argumentação e, para isso, existem diretrizes a serem seguidas, no decorrer da pesquisa, que são: acompanhar atentamente o raciocínio da criança sem concluir as respostas formuladas por ela às situações-problema propostas; compreender que o processo pelo qual a criança chega à resposta é de suma importância; considerar que as respostas dadas pela criança devem sempre ser verificadas, a fim de que se identifique o raciocínio que levou à formulação das respostas. Duas recomendações são ainda feitas por Carraher (1989), a de que o pesquisador não deve se satisfazer com respostas ambíguas das crianças, procurando questioná-las novamente e, sobretudo, o pesquisador deve permanecer atento a diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo durante a entrevista.

Em seus estudos Piaget constatou a existência de cinco diferentes maneiras de reagir ao exame clínico: 1) a criança pode dar uma resposta qualquer; 2) inventar histórias, fabulação; 3) "a crença sugerida", a resposta dada tem a intenção de agradar o entrevistador; 4) "a crença desencadeada”, respostas gerada a partir de raciocínio e reflexões próprias, sem a influência do pesquisador; e; 5) “a crença espontânea”, resposta formulada sem a necessidade de raciocinar. Nesse caso, mesmo que o pesquisador contra-argumente, a criança não modifica sua resposta (Castro, 1996, p. 170).

A investigação

Colaboraram com esta pesquisa vinte crianças de uma escola pública estadual de um município do interior do Paraná, sendo que, dez pertenciam à terceira série do ciclo básico e dez cursavam a quinta série do Ensino Fundamental. Estes dois grupos foram subdivididos ainda em outros dois grupos menores compostos cada um, por cinco crianças que, segundo suas professoras, apresentavam bom desempenho de aprendizagem em Matemática e cinco que apresentavam desempenho tido como insuficiente.

A escolha de crianças nestas séries específicas foi feita em função dos estudos de Kamii (1995b) para quem: “o sistema decimal aparece pela primeira vez na segunda série, e que a proporção de crianças nessa categoria aumenta daí para frente”, ou seja, a construção do sistema de dezenas ocorre gradativamente durante o período que compreende da segunda à quinta série.

A intenção foi comparar as argumentações utilizadas pelas crianças de terceira série, que segundo Kamii (1995b) estavam no início da construção do SND, com aquelas que já se encontravam em fase de consolidação, para tentar inferir o papel desempenhado pelo ensino algorítmico.

Para atender aos objetivos propostos foram estabelecidas cinco estratégias de investigação, a saber:

- a primeira denominada “da direita para a esquerda”, investigou se as crianças compreendem a importância da organização espacial do algoritmo, isto é, para operar corretamente, as unidades devem estar “embaixo” das unidades, as dezenas na coluna das dezenas, etc.;
- a segunda estratégia, “para além do algoritmo” questionou se há outras maneiras de fazer as “contas” de adição e subtração sem lançar mão dos algoritmos convencionais, com a intenção de investigar se as crianças utilizam outras técnicas de resolução, bem como quais são elas;
- terceira, a técnica do “vai um”, consistiu em investigar se as crianças ao desenvolverem o procedimento algorítmico da adição, percebem que aí estão implícitos os princípios e as propriedades do SND, mais especificamente, se elas compreendem o valor posicional do algarismo;
- a quarta estratégia, técnica do “empresta um”, permitiu observar se as crianças entendem que, na subtração com reserva, elas devem, antes de iniciar a “conta”, decompor uma dezena em dez unidades, somente então poderá subtrair. Esta estratégia também permitiu investigar se a criança percebe, no algoritmo da subtração, o SND.
- na última estratégia, “prova real”, o objetivo foi investigar se as crianças entendem as operações de adição e subtração como operações inversas, podendo utilizar uma para confirmar o resultado da outra.

As estratégias mencionadas foram embasadas nos princípios e propriedades do SND, particularmente no princípio posicional e nas recomendações para o trabalho pedagógico com o cálculo, que priorizam o trabalho simultâneo entre o cálculo escrito e o mental, constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (2000).

Cada criança participou de um único encontro com uma das pesquisadoras, durante o qual lhe foi proposto que resolvesse algumas “contas”, sendo duas de adição e quatro de subtração, com graus de complexidades diferentes. Essas se encontravam dispostas na forma de sentença matemática, em uma folha de sulfite branca, conforme a disposição a seguir:

135 + 99 =

1035 + 999 =

63 – 54 =

3058 – 2379 =

2014 – 1989 =

100 – 24 =

Em todas elas a criança necessitava lançar mão do uso de recursos (decomposição ou reagrupamento) para a sua resolução. Foram escolhidas, na maioria, contas contendo no mínimo três dígitos no minuendo (no caso das subtrações), com o intuito de se ter um grau de dificuldade maior. Para resolver as contas propostas, seguindo os procedimentos algorítmicos convencionais, as crianças deveriam seguir algumas “exigências” tais como:

- Na conta 135 + 99, o aluno necessita “transformar” dez unidades em uma dezena, somando-a com as dezenas já existentes e dez dezenas em uma centena, somando-a com as centenas existentes.

- Na conta 1053 + 999, o aluno necessita “transformar” dez unidades em uma dezena, somando-a com as dezenas já existentes, e dez dezenas em uma centena, somando-a com as centenas existentes, sendo que na primeira parcela existe um “zero” na “casa” das centenas, depois, transformar dez centenas em um milhar e somar ao milhar já existente.

- Na conta 63 – 54 a criança deverá decompor uma dezena em dez unidades, somando-a com as unidades já existentes para poder efetuar a conta.

- Na conta 3058 – 2379, o aluno deverá decompor uma dezena em dez unidades, adicionando-a às unidades existentes para depois subtrair, em seguida, como na “casa” da centena do minuendo existe um zero, deverá decompor uma unidade de milhar em dez centenas, para depois decompor uma centena em dez dezenas e continuar a subtração.

- Na conta 2014 – 1989, a criança procederá da mesma forma que na subtração anterior. Deverá decompor uma dezena em dez unidades, adicionando-a às unidades existentes, para depois subtrair; em seguida, como na “casa” da centena do minuendo existe um zero, deverá decompor uma unidade de milhar em dez centenas, para depois decompor uma centena em dez dezenas e continuar a subtração.

- Na conta 100 – 24, como a “casa” da dezena é “zero” o aluno necessitará primeiro decompor uma centena em dez dezenas, para depois decompor uma dezena em dez unidades e realizar o cálculo.

Enquanto as crianças desenvolviam os cálculos, foram feitas intervenções com a finalidade de direcionar as explicações para os objetivos da pesquisa. As questões que nortearam a entrevista foram: Porque tem que organizar a “conta” dessa forma? Como você ensinaria uma criança do 1º ano a fazer esta conta? O que é “vai um”? O que é “emprestar” um? “Um” o quê? Será que esta é realmente a resposta correta? Como você mostraria para um amigo que esta conta está certa? Se eu não tivesse lápis e papel daria para resolver uma conta de mais ou de menos? Será que tem outro jeito de fazer essa conta sem ser o jeito que a gente aprende na escola?

Esse roteiro teve a finalidade de orientar a entrevista, porém, a conversa seguia sempre a diretriz determinada pelas crianças sem que, todavia, os objetivos fossem perdidos de vista. Para a análise das informações coletadas, inicialmente, foram feitas as transcrições das entrevistas e uma leitura minuciosa dessas transcrições, em conjunto com os protocolos de cada criança, tendo em vista as estratégias de investigação adotadas: da direita para a esquerda, para além do algoritmo, a técnica do “vai um”, a técnica do “empresta um”, e a prova real. Nos trechos aqui apresentados a pesquisadora é denotada como **P** e os alunos como $\mathbf{A_i}$.

Da direita para a esquerda

Para investigar se as crianças colaboradoras da pesquisa entendem a organização espacial do algoritmo, durante a entrevista, eram indagadas quais as razões pelas quais é necessário organizar os números da maneira como o fazemos (da direita para a esquerda) para poder efetuar a conta. As “contas” de apoio para situar esse questionamento foram as duas operações de adição propostas.

Todas as crianças entrevistadas sabiam que para chegar ao resultado adequado da operação proposta era necessária a correta organização espacial do algoritmo, em outras palavras, elas estavam convictas de que devemos organizar os números de forma que as unidades sejam adicionadas às unidades, as dezenas adicionadas às dezenas, as centenas adicionadas às centenas e assim sucessivamente. No entanto, quando eram indagadas sobre o motivo por que essa organização deveria ser mantida, elas recorriam à própria organização espacial do algoritmo como único argumento para justificar sua ação, como atestou a fala de $\mathbf{A_8}$:

> **P –** A outra criança[1] que eu entrevistei me falou que devemos colocar esses números (999) daqui para cá (da esquerda para a direita). Um 9 embaixo do 1, outro 9 embaixo do 0 e outro embaixo do 3, daí fica essa casinha sem nada. Será que pode? (Refiro-me à adição de 1035 com 999).
>
> $\mathbf{A_8}$ **–** A unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena, centena embaixo de centena. A da unidade não pode deixar vazia. A casinha.

Outro fragmento que confirma nossa hipótese é a fala de $\mathbf{A_1}$:

> **P –** A outra criança que eu entrevistei colocou os números assim: esse 9 embaixo do 1, esse outro 9 embaixo do 3 e aqui embaixo do 5 ela não colocou nada.
>
> $\mathbf{A_1}$ **–** Tá errado.
>
> **P –** Está errado?

[1] Criança fictícia citada durante a pesquisa em momentos que a pesquisadora necessita criar uma situação de conflito cognitivo.

A_1 – Tem que colocar debaixo da unidade.

P – Embaixo da unidade, como assim?

A_1 – Unidade embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena e centena embaixo de centena.

Analisando essas frases que as crianças repetiram de maneira automática, a impressão é a de que estão “copiando” de algum lugar, porém, não entendem realmente o que isso significa. Este fato evidencia que o importante não é a repetição das regras de um procedimento e sim, propiciar situações de aprendizagem que permitam às crianças descobrirem as razões que o fundamentam, como, por exemplo, a formulação de perguntas acerca da pertinência ou não da utilização do algoritmo formal, a fim de levar a própria criança a indagar se é possível obter o mesmo resultado para uma determinada operação, procedendo da direita para a esquerda ou vice-versa (Lerner, 1995).

Para além do algoritmo

Para investigar se as crianças iam “além do algoritmo”, isto é, se utilizavam outras técnicas operatórias, por exemplo, o cálculo mental, algumas das “contas” a elas apresentadas foram contextualizadas durante as entrevistas e lhes era indagado se seria possível resolver a questão sem o uso de lápis e papel. Para essa estratégia foi selecionada, uma “conta” de subtração (100–24) e duas de adição (135+99 e 1035+999) que foram utilizadas aleatoriamente, conforme andamento da entrevista. A seleção das duas operações de adição deve-se ao fato de ser possível fazer em cada uma delas, o arredondamento de uma das parcelas (99 ou 999), facilitando assim o cálculo mental.

A aplicação dessa prova deixou evidente a insegurança das crianças no momento de emitir uma resposta totalmente sua, sem o amparo ou aprovação de outros, indício de carência de autonomia na aprendizagem. Também ficou patente a ausência de uma reorganização pessoal do conhecimento, suscitando indagações, cujas respostas nossa pesquisa foi insuficiente para responder, tais como: a ausência de reorganização pessoal do conhecimento deve-se ao fato de que o seu desenvolvimento cognitivo não lhe permite, no momento, aprender determinado tema ou o processo de ensino a que foi submetida, que não lhe possibilitou a construção desse conhecimento.

O fragmento da fala de **A_9** demonstra que as crianças percebem o cálculo mental como sendo uma reprodução do algoritmo formal. Dito de outra forma, elas “imaginam” o papel no qual haveria o algoritmo organizado espacialmente e tentavam operar como se estivessem resolvendo com lápis e papel:

P – Se nós estivéssemos no intervalo, e você e um outro amigo seu estivessem brincando de virar figurinha. Você sabia que quando foi para o intervalo tinha 100 figurinhas na mão, aí, jogando com seu amigo, perdeu 24. Tem como saber quantas figurinhas sobrou para você quando vocês pararam de jogar, sem fazer conta com papel e lápis? Porque lá nós não temos papel e lápis.

A_9 – Assim, por exemplo, 100 figurinhas e perdeu 24?

P – É, perdeu 24. Tem jeito de fazer sem ser com lápis e papel?

A_9 – Tem.

P – De que jeito a gente faz?

A_9 – 100 – 24?

P – Dá para fazer sem usar o papel?

A_9 – Dá.

P – Dá? (Como ele não efetuava, continuei questionado)

E tem outro jeito da gente fazer essa conta sem ser do jeito que aprendemos na escola?

A_9 – Tem.

P – Que jeito?

A_9 – Pensar e fazer assim sem pôr não papel (referindo-se ao cálculo mental).

A_9 respondeu que era possível fazer a "conta" proposta de outra forma, além do algoritmo convencional ensinado na escola. Entretanto pedimos várias vezes que ele mostrasse como deveríamos proceder para encontrar o resultado, no caso, saber quantas figurinhas sobraram, e não obtivemos resposta em valor numérico, ela afirmou apenas que bastava pensar, sem pôr no papel, que obteríamos o resultado. Como essa resposta foi insuficiente para afirmarmos se **A_9** sabia realmente como desenvolver o cálculo mental no decorrer da entrevista, retomamos esse questionamento:

P – Vamos supor que eu e você tínhamos cada um, um álbum de figurinhas. Você contou as figurinhas do seu álbum, deu 135, e eu contei do meu, deu 99 figurinhas. Se nós fôssemos pegar todas as figurinhas que nós temos e colocar em um único álbum, daria para saber, sem fazer contas com lápis e papel, quantas figurinhas nós temos juntos?

A_9 – Sem fazer as continhas, assim é contar?

P – Sem fazer as continhas como se faz na escola, no papel. Tem jeito de saber quantas figurinhas nós temos?

As suas 135 e as minhas 99?

A_9 – Tem.

P – Tem? Quanto daria?

A_9 – (...)

Acho que é 102.

P – Como você fez para saber?

A_9 – Acho que é de mais, aí, tinha que somar.

P – Como você somou?

A_9 – Tem que pensar. Ai junta os dois resultados e ponha junto.

P – E se a gente tivesse um pouco de figurinhas a mais? Você tivesse 1035 e eu 999. Também dá para saber, se juntássemos as minhas e a suas? Uma outra criança que eu entrevistei me disse que se arredondássemos o 999 para 1000, somássemos com o 1035 e tirássemos um do resultado daria para saber? Será que dá?

A_9 – Não sei.

P – Não sabe?

A_9 – Eu não consigo contar sem ser escrito.

A_9 revelou-se totalmente dependente do lápis e papel. Nem mesmo quando mencionamos que outra criança utilizara o arredondamento ela se propôs a arriscar uma resposta para o cálculo proposto.

A impossibilidade da quase totalidade (17 em 20) das crianças entrevistadas de realizarem cálculos mentais despertou atenção para outro aspecto fundamental: a educação para a cidadania. Não existe conteúdo específico de Matemática para a cidadania, todavia, quando a criança é capaz de efetuar cálculos mentais e ter confiança nos resultados obtidos, ela está exercendo sua cidadania "matemática". É com discussões e troca de idéias que a criança vai desenvolvendo sua autoconfiança, fator indispensável para que ela se aventure em experiências matemáticas fora do contexto escolar.

O cálculo mental é uma via de acesso à compreensão e à construção do algoritmo convencional, ao mesmo tempo em que funciona como ferramenta de controle do mesmo. Contudo, para que isso seja possível é necessário que o cálculo mental se torne automático, liberando a criança para a construção de um novo conhecimento matemático (Parra, 1996).

A técnica do "vai um"

A investigação da compreensão das crianças acerca do fato de que a técnica do "vai um" se fundamenta no Valor Posicional e utiliza as propriedades do SND foi feita a partir da resolução de duas contas de adição: 135 + 99 e 1035 + 999. Entre as cinco crianças de terceira série, com bom desempenho escolar, quatro chegaram corretamente ao resultado. A única que não obteve o resultado correto efetuou as duas operações como sendo de subtração (o que pode ser atribuído à falta de atenção).

A análise dos resultados obtidos a partir dessa estratégia aponta: problemas de compreensão dos conceitos de número e algarismo, o que pode ser confirmado em vários momentos do relato das crianças, tanto nas de quinta quanto nas de terceira, com bom desempenho ou com desempenho insuficiente na aprendizagem Matemática. O que muda é apenas a maneira de se expressar, particular de cada criança, por exemplo, "é o 1 desse 14", "é, o 1 é 1 e o 4 é 4", "o número 1 que subiu".

Outro fato importante é a falta de conexão entre conceito e procedimento, nenhuma criança entrevistada conseguiu explicar que para operar corretamente o algoritmo da adição é necessário ficar atentos às regras que são necessárias seguir. Apesar de saber fazê-las, sua ação não é consciente a ponto de entender que tais regras estão fundamentadas no SND. Comprova essa afirmação os fatos de elas não terem emitido resposta adequada quando indagamos o que era o "um" que "subia".

Foi possível perceber também, ao longo das entrevistas, que elas manifestavam muita insegurança e falta de autonomia, o que pode ser confirmado na explicação de **A_7**, sobre o procedimento utilizado nas "continhas" representadas na figura 1:

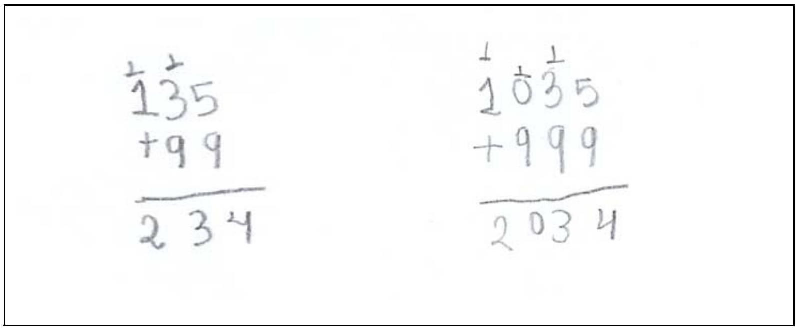

Figura 1: "Continhas" realizadas por A₇ e utilizadas pela pesquisadora para investigar a compreensão do "vai um".

P – Esse "um" aqui (aponto para as 10 unidades que ela colocou na casa da dezena, nas duas "contas" da figura 1) por que você o subiu aqui?

A_7 – Por que não pode pôr junto.

P – Outra criança que eu fiz entrevista colocou tudo aqui embaixo (me refiro a deixar as 14 unidades na coluna das unidades). Daí fica errado?

A_7 – Não sei. A professora ensinou tudo assim. Que não pode por tudo junto.

P – Não pode por? E esse "um" que vai aqui, o que é?

A_7 – É 1 desse 14.

Na ausência de argumentação das crianças entrevistadas, é fácil concordar com Kamii (1995a-b) quanto à necessidade de propiciar à criança tempo suficiente para a construção do sistema de unidades, para que não fique prejudicada a construção do sistema de dezenas, mas para isso a criança precisa ser autônoma em sua educação, pois a construção das relações hierárquicas depende da sua própria ação mental.

A investigação realizada confirma os resultados de Lerner (1995), pois mostra que as crianças têm dificuldades em entender que o mesmo algarismo serve para escrever vários números, dito de outra maneira, o 1 colocado na ordem das unidades é 1 unidade, no entanto, quando colocado na ordem das dezenas, passa a ser 1 dezena, ou seja, 10 unidades. Ainda segundo Lerner (1995) um sistema de numeração tão complexo quanto o SND deve ser apresentado para as crianças de diversas formas, na tentativa de proporcionar a elas a compreensão dos seus princípios e propriedades.

Um exemplo da falta de significado pode ser observado quando pedimos a **A_2** que representasse o 4 que "fica" e o 1 que "sobe":

P – Esse "um" que sobe aqui é 1...?

A_2 – É 1 do 14.

P – 1 do 14?

A_2 – Porque não pode colocar o 1 aqui (aponta para as unidades).

P – Se fosse para representar em conjunto de bolinhas, esse 4 e esse "um" que sobe aqui...

A_2 – 14?

P – Para dar o 14. Como que você representaria?

A_2 – Faz 14 bolinhas?

P – É, fazer a representação desse valor que fica e desse que vai. Do 14. Porque nós o separamos em partes. Ficaram 4 e subiu 1, não foi? Então, para fazer um conjunto com 14 e depois mostra o 4 que ficou e o 1 que subiu. Como ficaria? Você sabe me ajudar a fazer isso?

A_2 – Aqui no 14 eu faria 14 bolinhas.

P – Faz então para podermos ver como fica. (a criança produz o desenho da figura 2)

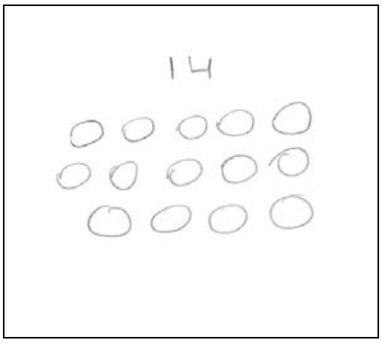

Figura 2: Representação feita por A_2 do número 14.

A_2 – (...) 14 bolinhas.

P – A outra criança que eu entrevistei fez assim, separou aquele "um" que foi daquele 4 que "ficou". Aqui, do jeito que você colocou (aponto para as 14 bolinhas desenhadas em um único grupo, conforme a figura 2, e a criança produz a figura 3):

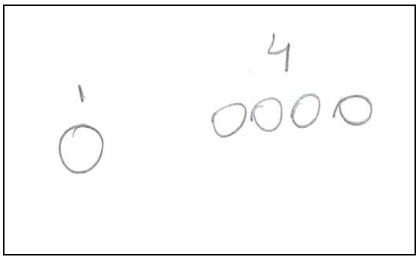

Figura 3: Representação feita por A_2 do número 14, agora "separando" o um.

A_2 – Esse daqui é os 14. Esse daqui é o 1 que subiu, e esse é o 4 que ficou.

P – Então esses conjuntos aqui...

A_2 – Vai dar o 14.

P – Tem a mesma quantidade?

A_2 – Ahan! Não tem a mesma quantidade de bolinha, né!

P – É que a outra criança falou para mim que tinha que ter a mesma quantidade de bolinhas.

A_2 – Não precisa, se colocar o 1 aqui na frente, vai dar o mesmo 14 do mesmo jeito.

Tanto Kamii (1995 a-b) quanto Lerner (1995) apontam que o ensino dos algoritmos convencionais das operações elementares não deve ser feito desvinculado do SND. As autoras diferem, todavia, num ponto. Kamii (1995 a-b) opõe-se radicalmente a este ensino nas séries iniciais, considerando-o, inclusive, prejudicial, enquanto que Lerner (1995) enxerga possibilidades de colaboração entre o trabalho pedagógico com os algoritmos e a construção e consolidação do SND.

A técnica do "empresta um"

Na investigação de como as crianças compreendem a subtração com reserva que, como a estratégia anterior, fundamenta-se no Valor Posicional, foram propostas três contas: 63 – 54, 3058 – 2379 e 2014 – 1989. Pela análise da explicação de **A_1** para a primeira "continha", representada na figura 4, fica visível que a regra para a resolução do algoritmo foi memorizada (o que pode ser constatado no primeiro parágrafo da transcrição) e que essa criança tem uma compressão parcial do procedimento utilizado, pois consegue perceber o "um" que emprestou como uma dezena:

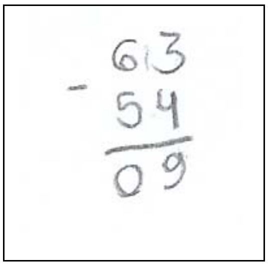

Figura 4: "Continha" realizada por A_7 e utilizada pela pesquisadora para investigar a compreensão do "empresta um".

> **A_1 –** 63 começa de cima e pela unidade. 3 não dá pra tirar da 4 ,então, vai pegar emprestado do 6. Então fica 13. (Conforme fala, a criança aponta os algarismos na "continha" conforme figura 4).
>
> **P –** Quanto que pega emprestado do 6?
>
> **A_1 –** Pega só 1, que aumenta uma dezena.

A análise dos resultados aponta que as crianças entrevistadas, apesar de utilizarem o algoritmo da subtração, não têm conhecimento do conceito necessário para entender o mecanismo que utilizam. As explicações das crianças de terceira e quinta séries não diferem de maneira significativa, apesar de mencionarem a necessidade de pegar uma dezena emprestada para poder operar (como afirmou **A_1**). Não conseguiam finalizar a explicação de forma adequada. O algarismo era percebido desvinculado da quantidade que ele representa em cada ordem.

Novamente aqui, os resultados da investigação realizada confirmam os resultados de Lerner (1995) e apontam para a necessidade de mudar o enfoque que a escola tem dado para o trabalho com as operações, visando propiciar às crianças, uma prática pedagógica que possibilite a (real) construção dos conhecimentos matemáticos.

Como Kamii (1995 a-b) comprovou em suas pesquisas, o SND requer um longo período de tempo para ser sedimentado. É indispensável proporcionar às crianças condições para essa construção visando à compreensão de conceitos que são indispensáveis ao entendimento do valor do "um" que se pede emprestado, por exemplo.

A prova real

Durante a entrevista com as crianças colaboradoras, foi indagado se seria possível conferir o resultado da "conta" e, se a resposta fosse afirmativa, como deveria ser feita essa confirmação. Ao analisar os protocolos das crianças de terceira série que apresentavam desempenho satisfatório em Matemática, observou-se que elas se confundem ao tentar mostrar como fazer a prova real. **A_1** só conseguiu definir o que deveria ser feito após a verificação das duas hipóteses por ela apresentadas, indício de que o conceito do Princípio Fundamental da subtração ainda não estava devidamente compreendido por ele.

P – Se chegasse um amiguinho lá da sua sala e falasse assim: essa continha está certa mesmo? Você saberia responder se ela está certa?

A_1 – Aí, eu não ia ter certeza, mas eu acho que tá certa.

P – E tem um jeito de fazer para comprovar, para ter certeza?

A_1 – Fazendo a prova real.

P – Como faz a prova real?

A_1 – Aqui, tem o 9, então, vai ter que fazer 9 mais 54 ou 9 mais 63. Se for 9 mais 63, dá 54, tá certa, se for 9 mais 54, dá 63, tá certo. (A criança vai apontando os algarismos da "continha de menos" da figura 5)

P – Vamos fazer uma vez pra gente ver?

A_1 – Assim, faz 9 mais 63. 9 mais 3, 12 sobe "um". 1 mais 6, 7. (A criança faz a "continha de mais" da figura 5. Aponta para o resultado e conclui que a subtração efetuada está errada). 72, tá errado.

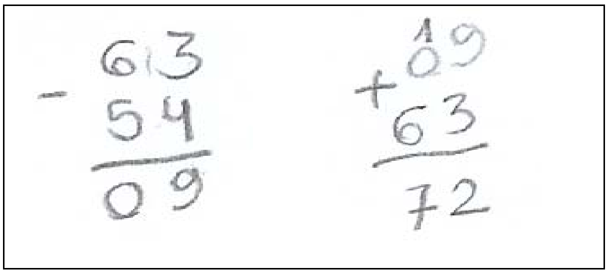

Figura 5: "Continha" e "prova real" realizadas por A_1.

P – A outra criança que eu entrevistei me falou que faz com o 54.

A_1 – Talvez. Tá certo. 54 mais. 9 mais 4, 13. 1 mais.5. 63, tá certo.

A análise das explicações de **A_1** evidencia que a compreensão da relação inversa entre adição e subtração ainda se constitui em um obstáculo a ser transposto pelas crianças, que necessitavam de reflexão acerca das ações para que percebessem a reversibilidade existente entre as operações. Em outras palavras, elas precisavam perceber que retornam ao ponto de saída ao inverter a ordem do caminho percorrido.

Considerações Finais

Muitos autores como Lerner (1995), Kamii (1988, 1995), Carraher(1990), Carraher e Schliemann (1995), Bariccatti (2003), Golbert (2003), Brizuela (2006) entre outros se dedicaram a investigar as dificuldades no ensino e aprendizagem da aritmética nas séries iniciais e mostraram que o Sistema de Numeração Decimal não é um conhecimento estritamente social, o que significa, em outras palavras, que o mesmo é construído, e mais, mostraram, também, que esta construção se inicia pelo sistema de unidades, depois pelo sistema de dezenas, culminando com o Sistema de Numeração Decimal, com todas suas classes e ordens. Ainda segundo algumas das pesquisas mencionadas, a construção do sistema de dezenas acontece dos 8 aos 12 anos de idade aproximadamente, isto é, durante o período que compreende a 2ª à 5ª série. Por esta razão, a presente pesquisa teve como sujeitos, crianças de 3ª série do Ensino Fundamental, fase em que elas já iniciaram a construção do sistema de dezenas, e crianças de 5ª série do Ensino Fundamental, momento de fechamento e consolidação dessa construção.

Pais (2006) afirma que o algoritmo é um dispositivo utilizado na resolução de situações-problema com a intenção de simplificar o cálculo, porém, para que haja real compreensão dos fundamentos desse procedimento convencional é necessário que se tenha um amplo conhecimento matemático. A inserção incorreta dos procedimentos convencionais, no ensino da aritmética, tem contribuído para a não compreensão desse dispositivo como, por exemplo, a concepção equivocada de que a repetição das ações nele prevista pode levar ao seu entendimento, ou seja, a percepção do conhecimento matemático que o sustenta, o SND.

Lerner (1995) afirma que a falta de compreensão do processo de resolução dos algoritmos se deve ao tratamento desse procedimento desvinculado do SND, que é de natureza posicional. Para os adultos, que já passaram pelo processo de construção e reconstrução dos princípios do sistema de numeração decimal, é fácil trabalhar com um sistema de base dez, mas as crianças em fase de aprendizado percorrem, em um curto espaço de tempo, toda construção que a humanidade levou séculos para aprimorar.

Os resultados da investigação realizada apontam que não houve diferença significativa nas respostas das crianças de 3ª e 5ª séries, pois as mesmas dificuldades de argumentação encontradas pelo primeiro grupo também foram observadas nas respostas do segundo. Mesmo quando conseguem resolver as “contas” de adição e de subtração com reserva, as crianças parecem apenas ter memorizado as regras mecanicamente, sem entender que os princípios e as propriedades do SND estão na base das técnicas operatórias dessas operações. A atuação das crianças indica que o SND não está consolidado, e assim, podemos constatar que o ensino da aritmética centrado nos algoritmos não possibilitou avanços significativos no que se refere à efetiva construção deste sistema.

Por outro lado, constatou-se também que, apesar de haverem cursado no mínimo quatro anos do Ensino Fundamental, quando chegam à quinta série, algumas crianças apresentam dificuldades, ou mesmo não sabem como utilizar as técnicas operatórias de resolução das operações aritméticas de adição e de subtração, indicio de que o objetivo da aprendizagem dos procedimentos algorítmicos não foi atingido.

Enfim, se pesquisas anteriores demonstraram que o ensino, com ênfase nos algoritmos, não contribui para o desenvolvimento da autonomia do educando e nem promove o desenvolvimento da capacidade de argumentação, esta pesquisa aponta que esta ênfase não colabora sequer com a construção do conhecimento matemático, particularmente o que se refere ao Sistema de Numeração Decimal.

Existe um distanciamento quase que total entre a aprendizagem dos algoritmos convencionais e os princípios e propriedades do SND, o que é, certamente, uma conclusão preocupante considerando-se que a conexão entre essas duas habilidades não se desenvolve espontaneamente, ou seja, a criança que opera adequadamente os algoritmos convencionais da adição e da subtração pode não perceber a sua relação com o SND.

Não se recomenda, aqui, que o estudo dos algoritmos convencionais seja abandonado, afinal, eles são muito úteis para simplificar as operações matemáticas. Porém, o ensino não deve priorizar a memorização inexpressiva dos procedimentos, em detrimento da compreensão dos princípios e propriedades que possibilitam seu funcionamento lógico-matemático.

Promover conexão entre procedimento e conceito deve ser um dos principais objetivos da Educação Matemática, entretanto, para que ele seja alcançado, devem-se dispensar atenção especial às variáveis envolvidas nesse processo educativo, como: Qual metodologia deve ser utilizada para promover essa conexão? O livro didático, por ser um instrumento muito utilizado pelo professor, não deveria contemplar as orientações dos PCN_S e das atuais pesquisas? O professor, como mediador do conhecimento, não deveria ser munido de subsídios indispensáveis a uma prática escolar que vise à autonomia do conhecimento?

É evidente que essas questões já foram discutidas por outros pesquisadores e muitas propostas já foram feitas, porém, ao se confirmar que as crianças não percebem a relação existente entre o algoritmo convencional e os princípios e propriedades do SND, o que se infere é que essas propostas não foram incorporadas pelo processo educativo. Frente a essa realidade, é pertinente indagar o que ainda é necessário fazer para levá-las ao interior das escolas, para que se tornem efetivamente úteis. Esta é uma questão importante, que este estudo não dá conta de responder, porém, pode subsidiar outras pesquisas.

Urge romper com as concepções equivocadas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática escolar, que têm como conseqüências a reprovação e a evasão escolar. Conforme evidenciou nossa pesquisa, um dos principais desafios é equilibrar ensino e aprendizagem, a fim de oportunizar a criança as condições para que, tanto os procedimentos convencionais como os conceitos que os fundamentam, possam se constituir em conhecimento real.

Apesar das limitações desta pesquisa, em virtude da abrangência do tema abordado, a esperança é que ela possa juntar-se às várias outras com o intuito de fornecer subsídios que fomentem as discussões em torno das questões aqui levantadas, principalmente no que se refere ao dispositivo convencional e sua utilização de forma consciente e com compreensão.

Referências

BARICCATTI, K. H. G. (2003). *A Construção Dialética das Operações de Adição e Subtração no jogo de regras Fan Tan.* 2003. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP.

BRIZUELA, B. M. (2006). *O desenvolvimento matemático na criança*: explorando notações. Porto Alegre: Artmed.

CARRAHER, T. N.; SHLIEMANN, A. L. (1983). A adição e a subtração na escola: algoritmos ensinados e estratégias aprendidas. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, v. 64, n. 148, p. 234-242, set./dez.

CARRAHER, T. N. (1990). O desenvolvimento mental e o SND. In: CARRAHER, T. N. (Org.). *Aprender pensando* [:] Contribuições da Psicologia Cognitiva para a Educação. Petrópolis, RJ: Vozes.

CARRAHER, T. N. (1989). *O método clínico*: usando os exames de Piaget. São Paulo: Cortez.

CASTRO, M. F. P. de (Org.). (1996). *O método e o dado no estudo da linguagem*. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP.

D'AMBROSIO, U. (2004). Prefácio In: BORBA, M de C; ARAÚJO, J de L. (Orgs). *Pesquisa qualitativa em educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica. p. 11-23.

GOLBERT, C.S. (2003). *Novos rumos na aprendizagem da matemática*. Porto Alegre: Mediação.

KAMII, C.; DECLARK, G. (1988). *Reinventando a aritmética*: implicações da teoria de Piaget. 2. ed. Campinas, SP: Papirus.

KAMII, C.; JOSEPH, L. L.(1995b). *Aritmética:* Novas Perspectivas [-] implicações da teoria de Piaget. 4. ed. Campinas, SP: Papirus.

KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. (1995a). *Desvendando a aritmética*: implicações da teoria de Piaget. Campinas, SP: Papirus.

LEITE, L. B. (Org). (1987). *Piaget e a escola em genebra*. São Paulo: Cortez.

LERNER, D. de Z. (1995). *A matemática na escola*: aqui e agora; Trad. Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas.

PAIS, L. C. (2006). *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autentica.

PARRA, C. (1996). Cálculo Mental na escola primaria. In: PARRA, C.; SAIS, I. (Orgs). *Didática da Matemática* [:] Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas. p. 186-235.

Recebido em: 28.04.2009
Aceito em 22.09.2010