

**CONOCIMIENTOS–EN–ACCIÓN: UN ESTUDIO ACERCA DE LA INTEGRACIÓN DE LAS FUERZAS Y LA ENERGÍA EN CUERPO RÍGIDO**  
**(Knowledge-in-action: a study on the integration of forces and energy in a rigid body)**

**Consuelo Escudero** [cescude@unsj.edu.ar]

<sup>1</sup> Departamento de Física. Facultad de Ingeniería. UNSJ.  
Avda. Libertador 1109 (O). 5400. San Juan. Argentina.

Departamento de Biología. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. UNSJ

**Eduardo A. Jaime** [ejaime@unsj.edu.ar]

Departamento de Física. Facultad de Ingeniería. UNSJ.  
Avda. Libertador 1109 (O). 5400. San Juan. Argentina

### **Resumen**

En esta comunicación se prosigue con el estudio de la resolución de problemas en una forma compatible con la propuesta de las teorías de los campos conceptuales (TCC) de Vergnaud (1990, 1994, 1998) y de los modelos mentales de Johnson-Laird (1983, 1990). Se analizan, complementariamente a otro trabajo (Escudero y Jaime 2007), algunos logros y dificultades en estudiantes de primer año de ingeniería al resolver un problema del movimiento de un cuerpo rígido en términos de los conocimientos-en-acción que están usando. Se utiliza una metodología de investigación bajo el paradigma cualitativo, donde los datos se agrupan en categorías que no son provistas a priori por el marco teórico. Puede decirse que la calidad de la representación conceptual se ha mostrado taxativa en la calidad de la resolución propuesta. Algunos significados introducidos por los estudiantes pueden ser caracterizados como invariantes operatorios.

**Palabras-clave:** Conocimiento-en-acción; Representaciones internas; Resolución de problemas; Competencias complejas; Modelo de Cuerpo Rígido

### **Abstract**

This paper intends to go on with the study of problem solving in a compatible way with the theories of conceptual fields (TCC) of Vergnaud (1990,1994,1998) and mental models of Johnson-Laird (1983,1990). Together with findings of another study (Escudero & Jaime 2007), some achievements and difficulties of freshmen engineering students when solving problems of the motion of rigid body in terms of the knowledge-in-action are analysed. The research methodology under a qualitative paradigm grouped data into categories which are not provided a priori by the theoretical framework. It can be said that the quality of the conceptual representation has been explicit in the quality of the proposed solution. Some meanings introduced by students in their problem solving activities can be characterized as operational invariants.

**Keywords:** Knowledge-in-action; Students' representations; Problem Solving; Complex competences; Rigid Body Model.

### **Introducción**

El estudio del desarrollo y el aprendizaje de competencias complejas, sobre todo las que dependen de la ciencia y de la técnica constituye un aspecto central en cualquiera de las actividades profesionales. La resolución de problemas se puede considerar una actividad cognitiva compleja, sobre todo porque su abordaje y ejecución implican la utilización de una variedad de conceptualizaciones.

Cuando los alumnos son cuestionados sobre situaciones problemáticas en física, generalmente son capaces de producir explicaciones y pueden, frecuentemente, elaborar predicciones sobre la evolución de tales situaciones. Aparentemente estarían usando modelos

mentales, pero a diferencia de los modelos científicos, sus modelos son implícitos, son representaciones mentales que, en muchos casos, tienen lo que Vergnaud (1996) denomina *conocimientos-en-acción*, o sea, conocimiento inconsciente que permite al sujeto interactuar con su medio. La construcción de estas representaciones (internas y externas), en tanto, no es una tarea fácil, en gran parte por fundarse en ciertos conocimientos básicos. Las múltiples referencias al concepto de modelo también en las disciplinas Física y Matemática son una clara expresión de su papel fundamental en variados campos de conocimiento.

“Los modelos científicos en física constituyen una representación teórica de la realidad que es de segundo orden. El llamado sistema físico es una representación de primer orden que da estructura al mundo de los fenómenos, transformando los datos crudos en evidencias dentro de un padrón. El modelo, a su vez, respeta la estructura sintáctica de este sistema físico, modelándolo con términos teóricos y planteando relaciones funcionales y estructurales entre ellos” (Adúriz-Bravo y Morales 2002).

A medida que avanza la investigación en resolución de problemas, empiezan a componerse los vínculos con el aprendizaje de conceptos y las relaciones implícitas con la significación en su sentido más amplio. En el análisis pormenorizado de una situación problemática puede llegar a inferirse la presencia de algunos conocimientos implícitos, tradicionalmente difíciles de detectar, cuya calidad y organización influyen notablemente en los procedimientos que desarrollan las personas al intentar resolverlas.

Una revisión crítica de los procesos y resultados en la investigación en resolución de problemas y la configuración de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud tanto como marco teórico alternativo para la investigación en resolución de problemas en Ciencias (Escudero y Moreira 2004, Escudero 2005) como referente plausible de integrar los modelos mentales de Johnson-Laird con los esquemas de acción de Vergnaud (Moreira 2002, Greca y Moreira 2002) son los que han permitido arrojar luz.

En investigaciones previas sobre el proceso de aprendizaje del movimiento de un cuerpo rígido en general, algunos autores han reportado una serie de dificultades: con el reconocimiento como tal de la interpretación de las interacciones mediante fuerzas en relación con la interpretación de los aspectos energéticos asociados a dicha interacción (Bagno et al 2000, Escudero 2001, Martín y Solves 2001, Escudero y Jaime 2003), con la desvalorización de las condiciones de contorno (Costa y Moreira 2002, Escudero y Jaime 2002), con el cambio de modelo conceptual implicado (Dhillon 1998, Escudero y Jaime 2003, Escudero 2009), con la descripción cinemática del movimiento de un cuerpo rígido (Costa y Moreira 2003), con el rol de la inercia rotacional (Escudero et al 2009), con la fragilidad de la organización del conocimiento de los individuos (Escudero 2001, Costa y Moreira 2002), mientras que otros autores (Guisasola et al 2003; Escudero et al 2009) con los modos de razonar.

El modelo de cuerpo rígido reviste sin duda gran importancia en la explicación científica actual de muchos fenómenos físicos y su conocimiento resulta necesario para interpretar los fundamentos de diversas aplicaciones tecnológicas.

Nuestro objetivo más amplio es estudiar en detalle las decisiones que toman los alumnos en diferentes situaciones problemáticas y, consecuentemente, la búsqueda de conocimientos-en-acción sobre los que sería importante intervenir para poder ayudar a mejorar los procesos de aprendizaje en relación al modelo científico consensuado. Si bien esta comunicación se ciñe al estudio en profundidad de una situación problemática, nuestro equipo viene trabajando hace varios años en el área y continúa haciéndolo en distintos campos de la enseñanza de las ciencias. Lo que lleva a la necesidad de la identificación de conocimientos-en-acción, y por tanto, de su investigación y

documentación. En el apartado siguiente se describen apretadamente algunos elementos teóricos relevantes para el subsiguiente análisis.

## Fundamentación teórica

La teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud<sup>1</sup> es una teoría psicológica de los conceptos (Vergnaud 1990), una teoría cognitivista del proceso de conceptualización de lo real. Su objetivo es propiciar una estructura de las investigaciones sobre actividades cognitivas complejas, en especial con referencia a los aprendizajes científico y técnico. Se trata de una teoría pragmática en el sentido que presupone que la adquisición de conocimientos es moldeada por situaciones, problemas y acciones del sujeto en esas circunstancias (Vergnaud 1994). Es decir, que por medio de la resolución es que un concepto adquiere sentido. Además es una teoría de la complejidad cognitiva, que contempla el desarrollo de situaciones progresivamente dominadas, de los conceptos y teoremas necesarios para operar eficientemente en esas situaciones y de las palabras y símbolos que pueden eficazmente representar esos conceptos y operaciones para el individuo, dependiendo de su nivel cognitivo.

La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud hace un aporte que multiplica las posibilidades de conocer la génesis y la comprensión de los conceptos. Considera que un concepto es un triplete de tres conjuntos (Vergnaud 1990; Franchi 1999):  $C = (S, I, L)$  donde

**S:** conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto (el *referente*);

**I:** conjunto de invariantes operatorias<sup>2</sup> asociados al concepto (el *significado*);

**L:** conjunto de representaciones lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones a las que él se aplica y los procedimientos que de él se nutren (el *significante*).

Vergnaud asigna al término *situación* un significado restringido, el de tarea o problema a resolver, pero amplio y variado a la vez. Para él, son las situaciones las que le dan sentido a los conceptos y el sentido no está en las situaciones en sí. Un concepto se vuelve significativo para el sujeto a través de una variedad de situaciones y de diferentes aspectos de un mismo concepto que están envueltos en dichas situaciones. Al mismo tiempo, una situación no puede ser analizada a través de un único concepto, se necesitan varios de ellos. Esta es la razón por la que deben estudiarse los *campos conceptuales*, y no situaciones o conceptos aislados (1994).

Las fuentes originales de Vergnaud son los estudios de Piaget, fundamentalmente con la nociones de esquema y de invariantes operatorias, y los trabajos de Vygotsky. Vergnaud para definir la noción de esquema toma los elementos esenciales de la idea piagetiana, avanzando en la integración de los aspectos procedurales. El primero permite explicar la organización de la actividad del sujeto en una cierta situación encontrándose, entonces, en el centro de la actividad adaptativa de las estructuras cognitivas permitiendo caracterizar mejor los diversos momentos de la psicogénesis en determinado campo conceptual.

Este especialista recupera así la definición de esquema:

---

<sup>1</sup> Una descripción de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud y de sus implicaciones para la investigación y la enseñanza de las ciencias puede consultarse en Moreira (2002) y Escudero (2005).

<sup>2</sup> Invariantes operatorias o conocimiento-en-acción –como también son conocidos– dirigen el reconocimiento de los elementos pertinentes de la situación y la toma de información sobre la situación a tratar. Son los conocimientos contenidos en los esquemas (Vergnaud 1990, 1994, 1996b).

- se trata de una totalidad dinámica funcional, es decir, de una unidad identificable de la actividad del sujeto, que se corresponde con una finalidad identificable (1994).
- se trata de un universal, es decir, se reporta a una clase de situaciones, siendo posible, entonces que haya esquemas para todos los dominios de actividad (1998).
- está compuesto de muchas categorías de elementos indispensables: fines/propósitos anticipaciones, reglas de acción, posibilidades de inferencia en situación, invariantes operatorias (1990).

Para Franchi (1999) la ausencia de una conceptualización adecuada está en el origen de los errores sistemáticos cometidos por los alumnos. Pero son las invariantes operatorias las que articulan teoría y práctica, es decir, las que hacen la articulación esencial, ya que la percepción, la búsqueda y la selección de la información se basarían completamente en el sistema de conceptos-en-acción disponibles en el sujeto (objetos, atributos, relaciones, condiciones, circunstancias) y de teoremas-en-acción subyacentes a su comportamiento. Las invariantes operatorias se refieren a objetos, propiedades y relaciones que se mantiene a través de una serie de variaciones (o situaciones).

*Un teorema-en-acción es una proposición considerada como verdadera sobre lo real; un concepto-en-acción es una categoría de pensamiento considerada como pertinente (1996; 1998).*

La teoría de los campos conceptuales se constituye en un referencial muy rico para comprender, explicar e investigar el proceso de aprendizaje significativo: al rescatar y enriquecer el concepto de esquema (*schème*) introduciendo los conceptos de *teorema-en-acción* y *concepto-en-acción*; al colocar la conceptualización en el centro del desarrollo cognitivo; al definir campo conceptual; al priorizar la interacción sujeto-situaciones<sup>3</sup>. Y también al definir concepto como un triplete, vinculando las invariantes operatorias, las situaciones y el conjunto de signos por los cuales se lo representa. Por tanto, en este marco los conceptos no son independientes, están asociados entre sí constituyendo una entidad conocida como campo conceptual y es éste el que se desarrolla.

A nuestro entender y siguiendo a Vergnaud considerar la resolución de problemas y la formación de conceptos desvinculada es desacertado. Subestima dos aspectos: la parte de representación simbólica y de conceptos presente en la resolución de problemas, por un lado; y la parte de resolución de problemas que surge en la formación de conceptos, por otra. Ambos elementos forman una misma cosa: la conceptualización.

Entre los individuos lo que se desarrolla son formas de organización de la actividad. El problema de la enseñanza suele ser en gran parte el de llevar al aprendiz a desarrollar sus competencias. Las representaciones implícitas y simbólicas son muy útiles en situaciones o contextos que requieren respuestas o acciones automatizadas. Las representaciones explícitas permiten abordar tareas más complejas.

## **Metodología de investigación**

Ésta es una investigación de tipo cualitativa donde los agrupamientos se definen durante las sucesivas miradas al corpus (Glaser y Strauss 1967). Esto supone un trabajo de inmersión en él que permite conocer por comparación constante una cualidad que lo describa lo más fielmente posible. Se intenta encontrar regularidades en el uso convencional y funcional que hacen los alumnos de la

---

<sup>3</sup> A diferencia de Piaget que prioriza la interacción sujeto-objeto. No confundir con “sujeto en contexto”, se le agregan elementos socioculturales, lingüísticos, etc. Se aborda la ontogénesis de la interpretación y de la comprensión a partir del protagonismo irrefutable de la historia personal y del contexto cultural y lingüístico en el que se encuentra inmerso el interpretante.

noción de interacción y de los aspectos energéticos asociados, en el campo conceptual de la Mecánica Clásica, en la temática Dinámica del Cuerpo Rígido.

La presente investigación fue realizada en situación real de aula. Los datos se registraron durante el segundo semestre de 1998 y 2002, en la disciplina Física I de la Facultad de Ingeniería de la UNSJ. Aquí se presenta principalmente el análisis de la resolución escrita de un problema de dinámica del cuerpo rígido en 34 estudiantes (1998) y 30 (2002), ambos de 1º año, en ocasión de la tercera evaluación parcial. Dicha evaluación consta de seis ítems y este problema se ubica en último lugar. Por tanto, en el diseño de la presente investigación podemos distinguir dos momentos, que denominamos fase exploratoria y fase principal.

El problema bajo análisis (ver Figura N° 1) cumple la función de hacer de nexo entre un teorema de conservación y la relación de Newton, además de dar significado a las condiciones propias de la situación<sup>4</sup> (ver Anexo).

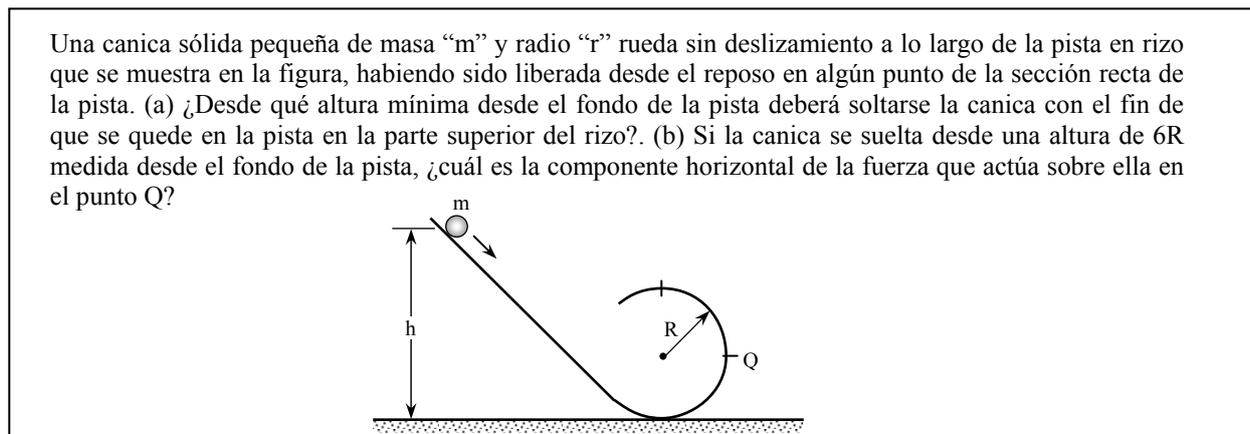


Figura N° 1: Situación problemática presentada a los estudiantes para su resolución.

Para concebir las categorías ha sido necesario que los investigadores realicen inferencias sobre las posibles concepciones implícitas (y explicitables) y modos de razonar de los alumnos al resolver. Se ha considerado como base para el análisis del discurso escrito la unidad: enunciado-solución, abordándola como conversación en la solución de un problema. En las investigaciones etnográficas interpretativas se utilizan como criterio básico de validez los significados locales de las acciones desde el punto de vista de los actores (Erickson 1989).

Frente al esquema binario y estático del signo de Saussure donde cada significante le corresponde uno o varios significados, en el esquema ternario y dinámico de Vergnaud para concepto (antes Peirce para signo<sup>5</sup>) la relación significante-significado varía en función de un tercer componente: el referente puesto en juego (conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto) fundamentado en la idea de que no es posible analizar los problemas y dificultades encontradas por los alumnos sin considerar las especificidades de los contenidos involucrados. De este modo, el desarrollo y la operacionalidad de un concepto envolverá siempre la superposición de esas tres dimensiones (Escudero 2005).

<sup>4</sup> Cabe recordar que para obtener la solución al nivel requerido no se precisa explicitar los momentos o torques de fuerzas, aunque constituyan otro modo válido de resolver. Los estudiantes así lo decidieron frente a otro problema de la misma evaluación en el que utilizaron torques.

<sup>5</sup> Para el pragmatismo los signos son los que importan. El significado se extrae externamente al signo a partir de la acción que el signo suscita, no internamente. Si a las cosas se las nombra es que son, antes que nada, signos que desencadenan mecanismos de razonamiento en donde “algo” está en lugar de otra cosa y un nombre ocupa el lugar de la cosa y ese nombre a su vez permite que se lo interprete. (Marafioti 2004)

En ocasiones y siempre que ha sido posible se ha usado además en la investigación –como elemento de control– para establecer la credibilidad de un estudio cualitativo un conjunto de recursos técnicos (Erlandson y otros 1993 apud Valles 1999): a) triangulación de datos, métodos e investigadores; b) acopio de documentación escrita, visual propia del contexto; c) discusiones con colegas; d) cuadernos de campo y diarios de investigación.

Después de aplicada la propuesta 1998 se analizaron las resoluciones escritas de 27 alumnos y se realizaron las primeras reflexiones que se consignaron en dos comunicaciones (Escudero y Jaime 2002, 2003). La identificación y la perseverancia de ciertas invariantes operatorias fueron decisivas para que se intentase revertir la situación. Se optó por reforzar los puntos débiles en la gestión del aula, enfatizar principalmente las relaciones modelo – realidad, particularizadas desde la energía y las interacciones; así como las formas: predicativa del conocimiento en relación con la operatoria, sin descuidar esta última. La nueva propuesta fue llevada a cabo en un grupo equivalente de estudiantes del curso 2002. Los criterios de equivalencia estimados son: establecimientos de origen en nivel medio, especialidades de ingeniería seguidas, proporción de alumnos recursantes, edades, grupo de docentes universitarios, examen de ingreso. En esta segunda fase (comenzada después de 2003) se analizan las resoluciones escritas de 21 estudiantes. En la medida en que vamos profundizando en este análisis vamos encontrando otros conceptos, teoremas y reglas de acción que siguen los alumnos al resolver.

## Discusión y evaluación de resultados

Un estudiante para resolver este problema necesita captar que el sistema canica–trayectoria curvilínea evoluciona en el tiempo y cómo evoluciona. Por un lado, la canica rueda sin deslizar a lo largo de una trayectoria curvilínea vertical desde un “estado inicial” hacia un “estado final” bajo la acción combinada de una fuerza conservativa, de la fuerza de fricción estática ( $\mathbf{fr}_s$ ) y de reacciones de vínculo. Mientras por otro, la pista limita su movimiento. La gran utilidad del concepto de energía potencial, como la del concepto de fuerza, es que puede permitir asociar formas específicas de energía potencial con interacciones específicas observadas en la naturaleza.

En nuestro caso, se identifican similitudes y diferencias agrupándolas en dos grandes representaciones de lo real: una para la situación física (analizada en otro trabajo<sup>6</sup>) y otra para el constructo *modelo de cuerpo rígido* desde la perspectiva de la energía y de las fuerzas que profundizamos, como se dijo.

### - Re-presentación del modelo de cuerpo rígido

Un análisis de los datos ha permitido identificar conocimiento-en-acción diferenciado llevándonos a proponer una clasificación por categorías. Se elaboraron principalmente en base a la diferenciación y articulación de conceptos tales como masa inercial, inercia rotacional; inercia rotacional respecto al eje instantáneo de rotación ( $I_{EIR}$ ), inercia rotacional respecto a un eje que pasa por el centro de masa ( $I_{CM}$ ); fuerzas, energías; velocidad angular de spin, velocidad angular orbital; energía potencial del sistema, variación de energía potencial del sistema; fuerza y trabajo.

---

<sup>6</sup> Una frecuente fuente de incomprensiones en la resolución del problema es la identificación de la situación física. De no ser superada detiene una adecuada resolución. Un 41% de la muestra ha diferenciado “restricciones” situacionales de acuerdo con el movimiento físico. Así mismo pudo advertirse que cada una de las categorías elaboradas ha presentado en su interior diferentes calidades de solución, estrechamente vinculadas a la presencia principalmente de una importante variedad de conceptos-en-acción (Escudero y Jaime 2007). Este hecho nos ha llevado a identificar más elementos que permitan desentrañar la estructura fina de dificultades y éxitos en la resolución del problema completo que se muestra en el presente trabajo.

Los teoremas y conceptos que ponen en acción grupos heterogéneos de alumnos cuando resuelven situaciones problemáticas en este campo conceptual, pueden ser:

**Categoría C<sub>1</sub>:** Escasa integración del modelo de cuerpo rígido

Los estudiantes agrupados en esta categoría muestran dificultades más distribuidas y asociadas a esquemas bastantes elementales. Privilegian la “forma” (grafía, formato, método, figura) de la solución en relación con la idea de tarea terminada. En términos de conocimientos-en-acción (o invariantes operatorias) el esquema puede contener:

*Conceptos-en-acción:* Cuerpo débil (o frágil); Inercia rotacional incipiente; Fuerza débil; Energía débil; Variables angulares; Variables lineales.

*Teorema-en-acción:* “Si manejo las ecuaciones que relacionan las variables, entonces calculo”.

**Juan (4, C<sub>1</sub>)**

Figura N° 2: Solución propuesta por el estudiante denominado Juan.

La anterior proposición parecería estar siendo considerada como verdadera sobre lo real por este grupo de individuos, para ellos lo es. Su “realidad” se representaría por un álgebra desconectada de los fenómenos naturales, de los términos teóricos y de las relaciones funcionales y estructurales entre ellos.

Las soluciones aportadas por los estudiantes nos han permitido identificar:

- Planteo pobre para el enfoque energético. Confunden fuerza y trabajo.
- Noción débil de cuerpo. No relacionan variables lineales con angulares.
- No integran el concepto de *cuerpo* desde ambos métodos de trabajo.
- La energía potencial se concibe como un concepto absoluto.
- Uso limitado del enfoque de fuerzas.

**Categoría C<sub>2</sub>:** Integración débil del modelo de cuerpo rígido a través de elementos aislados

El esquema puede explicitarse:

*Conceptos–en–acción:* Cuerpo débil; Inercia rotacional incipiente; Fuerza incipiente; Energía incipiente; Variables angulares y lineales asociadas incipientemente a los conceptos de fuerza y energía.

*Teorema–en–acción:* “Si busco las condiciones de contorno de mínimo (o máximo) obtengo la altura”.

Este grupo parece no tener en cuenta el campo de validez de las ecuaciones que implican condiciones de contorno; es decir, condiciones suficientes pero no necesarias.

Uno de los estudiantes de esta categoría <sup>7</sup> resuelve como sigue.

$F = m v^2/r \Rightarrow v_A = \sqrt{(F r / m)}$

a)  $m \Delta EM_{BA} = 0$   
 $r \Delta EM = \Delta E_c + \Delta E_p$

$$\Delta EM = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I \omega_A^2 - \frac{1}{2} I \omega_B^2 + mg 2R - 0 = 0 \quad (1)$$

$(v_B/r)^2$

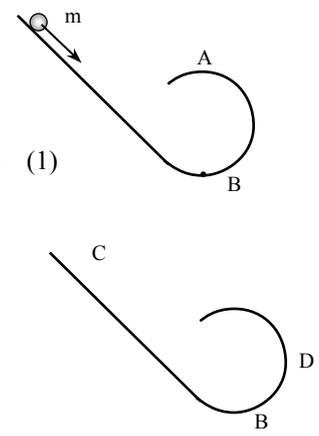
despejo  $v_B$  de la Ec (1)

$$\Delta EM_{CB} = 0$$

$$\Delta EM_{CB} = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I v_B^2/r^2 - mg h = 0$$

$$h = \frac{\frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_B^2}{r^2}}{mg}$$

b)  $h = 6R \quad \Delta EM = 0$   
 $\Delta EM_{CB} = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I v_B^2/r^2 - mg 6R = 0$   
despejo  $v_B$  y reemplazo en  
 $\Delta EM_{BD} = \frac{1}{2} m v_D^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I v_D^2/r^2 + \frac{1}{2} I v_B^2/r^2 + mg R$   
despejo  $v_D$  y lo reemplazo en  
 $F = m v_D^2/r$  y obtengo la F horizontal.



**Daniel (3, C<sub>2</sub>)**

Figura N° 3: Solución propuesta por el estudiante denominado Daniel.

En este caso:

- Presentan elementos aislados de integración en el concepto de *cuerpo* desde ambos métodos de trabajo.
- Plantean incipientemente la conservación de la energía mecánica (o el teorema del trabajo y la energía).
- Muestran una noción débil de cuerpo.
- Conciben la energía potencial como un concepto absoluto.
- Utilizan  $\omega_{\text{orbital}}$  en lugar de  $\omega_{\text{spin}}$  cuando corresponde el segundo.
- Muy pobre el enfoque de fuerzas.

**Categoría C<sub>3</sub>:** *Interacción débil y aspectos energéticos asociados al modelo de cuerpo rígido*

Este otro grupo de estudiantes ha avanzado en la identificación de la pertinencia de la conservación de la energía mecánica en un movimiento de rodadura pura.

*Conceptos–en–acción:* Interacción débil, Modelo de cuerpo rígido incipiente; Inercia incipiente; Fuerza; Energía no consolidada; Variables angulares y lineales asociadas al concepto de fuerza y energía en forma incipiente.

*Teorema–en–acción:* “Si busco las condiciones de contorno compatibles con los vínculos obtengo la altura (o la dejo en función de ellas).”

<sup>7</sup> Notar que el par ordenado (3, C<sub>2</sub>) que aparece junto al nombre del resolutor indica la pertenencia a dos categorías: el primero asociado a la categoría relacionada con la representación lograda para la situación física asignada en otro trabajo (Escudero y Jaime 2007), complementario a éste, mientras que el segundo corresponde con la categoría para modelo de cuerpo rígido desde su integración.

Este agrupamiento aparentemente tiene en cuenta las condiciones necesarias pero no las suficientes.

Una solución que muestra cómo estos estudiantes dejan expresada la altura en función de la fuerza normal es:

$a_c = v^2/r$        $V = \omega \cdot r$   
 $W_R = \Delta E_C$   
 $mg h = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$   
 $mg h = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot V^2/R$   
 $mg h = \frac{1}{2} m (NR/m + g) + \frac{1}{2} (N \cdot R)/(mR) + g/R$        $N \cdot r/m + mg/m = V^2$   
 $N + mg = m a_c$   
 $N + mg = m \cdot V^2/R$   
 $V^2 = N \cdot R/m + g$

a)- 
$$h = \frac{\frac{1}{2} N \cdot R + mg + \frac{1}{2} \frac{N}{m} + \frac{g}{R}}{mg}$$

b)-  $WR = \Delta EC$   
 $h = 6R$        $mg h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$   
 $mg 6R = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 r^2 + (\frac{1}{2} R^2 m + R^2 m) \cdot \omega$   
 $mg 6R = (\frac{1}{2} m \cdot r^2 + \frac{1}{2} m \cdot R^2 + \frac{1}{2} m \cdot R^2) \cdot \omega$   
 $mg 6R = \frac{3}{2} m \cdot R^2 \cdot \omega$   
 $\frac{mg 6R}{mR^2} \cdot \frac{2}{3} = \omega$        $\rightarrow \omega = 4g/R$   
 $N = m \cdot \omega^2$        $\rightarrow N = m \cdot 16 g^2 / R^2$

$\Sigma F_x \quad N = m \cdot a_c$   
 $\Sigma F_y = mg = 0$   
 $N = m \cdot V^2/r$   
 $N = m \cdot \omega^2 R / R$

**Pablo (4, C<sub>3</sub>)**

Figura N° 4: Solución propuesta por el estudiante denominado Pablo.

**Categoría C<sub>4</sub>:** *Interacción y aspectos energéticos asociados al modelo de cuerpo rígido limitado por la confusión entre velocidades angulares.*

El esquema puede explicitarse:

**Conceptos-en-acción:** Interacción no consolidada, Cuerpo Rígido no estabilizado; Inercia; Fuerza; Energía no consolidado; Variables angulares y lineales asociadas al concepto de fuerza y energía no consolidadas.

**Teorema-en-acción:** “Si busco las condiciones de contorno compatibles con los vínculos y determino el mínimo (o máximo), entonces obtengo la altura”.

Aunque tiene en cuenta el campo de validez y los límites máximos generales (condiciones necesarias y suficientes) continúa una imprecisión en lo conceptual.

Aparentemente similar a la categoría anterior pero con sustanciales aportes: en el planteo de la conservación de la energía mecánica, en la integración del modelo de cuerpo desde ambos métodos de trabajo y en la diferenciación  $I_{CM}$  de  $I_{EIR}$ ; salvo en la necesaria doble asociación de la  $v_{CM}$  con  $\omega_{spin}$  por un lado, y con  $\omega_{orbital}$  por otro, al tratarse de un cuerpo rodante en una trayectoria curvilínea. Paso a paso se va fortaleciendo el modelo de cuerpo rígido.

**Categoría C<sub>5</sub>:** *Interacción y aspectos energéticos asociados en el modelo de cuerpo rígido*

Ya comienzan a incorporar otras relaciones más. Hacen uso de la aplicación de una vez, de la conservación de la energía mecánica (no por tramos), de la verificación de ambas alternativas de trabajo (energías respecto CM y energías respecto EIR) como herramienta metacognitiva y de la incorporación de la diferencia entre  $\omega_{orbital}$  y  $\omega_{spin}$ . En términos operativos, simbolizan los radios de

la trayectoria y de la esfera (R y r) y operan con ellos; distintivamente. Es decir, modelan físicamente y ejecutan una potente representación mental. Una solución presentada:

*Conceptos-en-acción:* Interacción, Cuerpo Rígido; Inercia; Fuerza; Energía; Variables angulares y lineales asociadas a los conceptos de fuerza y energía.

*Teorema-en-acción:* “Si busco las condiciones de contorno compatibles con los vínculos y determino el mínimo (o máximo), entonces obtengo la altura”.

Canica de m y r  
masa radio

a)  $h_{\min}$   
 $\Delta EM = 0$   
 $\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 - mgd = 0$   
 $\frac{1}{2} I v_{CM}^2 / r^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = mgd$   
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 v_{CM}^2 / r^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = mgd$   
 $\frac{1}{5} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = mgd$   
 $\frac{7}{10} m v_{CM}^2 = mgd$   
 $\frac{7}{10} \cancel{m} g R = \cancel{m} g d$

$d = \frac{7}{10} R$   
 $h_{\min} = d + 2R = \frac{7}{10} R + 2R = \frac{27}{10} R = h_{\min}$

b)  $F = m a_N$   $d = 5R$   
 $\frac{7}{10} \cancel{m} v_{CM}^2 = 5 \cancel{m} g R$   
 $v_{CM}^2 = (5 g R \cdot 10) / 7 = \frac{50}{7} g R$   
 $a_N = v_{CM}^2 / R \Rightarrow a_N = \frac{50}{7} g R / R = \frac{50}{7} g$   
 $F = m a_N = m \frac{50}{7} g$

● esfera  
 $mg = m v_{CM}^2 / R$   
 $v_{CM}^2 / R = g$   
 $v_{CM}^2 = g R$   
 $v_{CM} = \sqrt{g R}$   
 $v_{CM} = \omega r$   
 $\omega = v_{CM} / r$   
 $I = \frac{2}{5} m r^2$

**Ricardo (5, C5)**

Figura N° 5: solución propuesta por el estudiante denominado Ricardo.

La apropiación del concepto de cuerpo rígido al parecer ha implicado, entre otros aspectos, las relaciones entre variables lineales, angulares, momento de inercia, vínculos; siempre presentados desde el habla de algún alumno tomado como espécimen.

...

Por ejemplo, en la figura N° 2 cuando Juan escribe “ $h = \frac{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{m r^2}{5} \omega^2}{m g}$ ” hipotetizamos que

al no vincular las velocidades: lineal (v) y angular ( $\omega$ ), su concepto de cuerpo rígido sería débil; o más bien, frágil. Mientras, en la figura N° 5 cuando Ricardo simboliza:

$$\left( \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 - mgd = 0; \quad \omega = v_{CM} / r \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} I v_{CM}^2 / r^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 - mgd = 0 \right)$$

está relacionando variables lineales y angulares. Allí inferimos que se trataría de una conceptualización mas elaborada que ha aprovechado precisamente las ventajas que ofrecen la variables angulares respecto de las lineales en el tratamiento del cuerpo rígido; y no de meras ecuaciones matemáticas. Se evidencia la parte de representación simbólica de conceptos presente en la resolución de problemas, sin subestimar la parte de resolución de problemas que está presente en la formación de conceptos.

**- El Modelo De Cuerpo Rígido ¿Qué Ideas Están En Juego?**

Puede decirse que los conceptos y teoremas que los estudiantes ponen en juego al resolver un problema están fundamentalmente en construcción. Eso nos ha llevado a otorgar grados en el uso hecho de los mismos. ¿Qué nos indican acerca de concepciones y competencias de los jóvenes sobre la construcción del modelo de cuerpo rígido?

Resolver un problema para los estudiantes de la Categoría 1 significa desvincular su naturaleza física, bajo la creencia extendida de que saber resolver un problema en esta disciplina se reduce a solucionarlo mecánicamente; es decir, otorgando escasa importancia a los significados y por tanto casi independientemente del contenido específico. Desconociendo que las formas operatorias también evolucionan y que están indisolublemente relacionadas con las formas predicativas en términos de la teoría de los campos conceptuales.

En cambio, las otras cuatro categorías sí ponen en juego propiedades del sistema. En ese sentido, todas son “válidas”. Sin embargo, pueden constituir aproximaciones parciales o coordinadas, así como pueden emplearse en situaciones o modos pertinentes.

En la segunda categoría los estudiantes acuden a elementos aislados en un movimiento de rodadura pura desde ambos métodos de trabajo y plantean incipientemente la conservación de la energía mecánica. En cambio, en la categoría 3 los alumnos han avanzado en la caracterización de lo oportuno de la conservación de la energía mecánica para presentar una solución viable. Por su parte, los estudiantes de la categoría 4 conciben la conservación de la energía mecánica y las relaciones energía e interacción, la integración y diferenciación de dos modelos físicos: partícula y cuerpo rígido, la inercia rotacional según diferentes ejes de rotación. Excepto la doble asociación de la  $v_{CM}$  con  $\omega_{spin}$  por un lado, y con  $\omega_{orbital}$  por otro, que fuera el atributo distintivo de las soluciones aportadas por los estudiantes de la categoría 5 y de relevancia en el caso de un sistema de cuerpos rígidos, no puntuales, en interacción. Ellos además, verifican ambas alternativas de trabajo (energías respecto del CM y energías respecto del EIR). La equivalencia-en-acción de ambos métodos de trabajo, mejor dicho de su re-descubrimiento, estaría modificando sustancialmente la significación.

Vemos así como las operaciones de pensamiento son analizadas en estrecha relación con el contenido tratado. Son estas operaciones de pensamiento el eje central de la conceptualización. En la siguiente sección se examinan los resultados hasta ahora presentados a los efectos de conjugarlos en un nuevo meta-análisis sobre re-representaciones y procesos utilizados.

#### - niveles de significación: ¿combinación de “representaciones?”

El análisis efectuado hasta aquí ha permitido caracterizar en cada alumno, al menos dos importantes representaciones puestas en juego al intentar resolver: (I) representación de la situación física (SF) y (II) conceptualización del modelo de cuerpo rígido (C). En las tablas N° 1 y N° 2 se presenta una síntesis del análisis descrito. Se indican las frecuencias halladas para los años 1998 y 2002, respectivamente.

		Variedad de conceptos-en-acción principalmente					Total	[%]		
		S F	C	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	Total	[%]
Variedad de teoremas-en- acción	1	1	2	2	1	–	–	–	3	11
	2	1	3	–	–	–	–	–	3	11
	3	–	–	–	2	4	1	–	7	26
	4 y 5	–	–	1	3	4	4	2	14	52
	Total	–	–	6	6	8	5	2	27	100
[%]		–	–	22	22	30	18	8	100	–

**Tabla N°1:** Frecuencias de categorías elaboradas para interpretar conocimiento-en-acción desde la situación física vs. la conceptualización del modelo de cuerpo rígido: Año 1998.

Efectuando una lectura cualitativa de las filas y las columnas, podría decirse que:

Es más frecuente encontrar estudiantes que puedan identificar adecuadamente el *teorema-en-acción* aunque no hayan completado la construcción del modelo de cuerpo rígido (5, C<sub>4</sub>) o (5, C<sub>3</sub>) – que la inversa (2, C<sub>5</sub>) o (3, C<sub>5</sub>).

Haber logrado una mejor aproximación a la conceptualización del modelo de cuerpo rígido en el movimiento de rodadura sin deslizamiento (C<sub>5</sub>) necesariamente se relaciona con entender adecuadamente el *teorema-en-acción*. Sin embargo, haber comprendido la situación física (*teorema-en-acción*) no define un único nivel de representación del modelo de cuerpo rígido.

Indicar una representación con restricciones físicas imposibles (*teorema-en-acción* C<sub>3</sub>:  $v_{\min} = 0$ ) no implica poner en juego un único nivel de conceptualización para la noción de modelo de cuerpo rígido.

Utilizar parcialmente la noción de modelo de cuerpo rígido no impone necesariamente utilizar los mismos *teoremas-en-acción*. Por ejemplo dentro de C<sub>4</sub> hallamos dos *teoremas-en-acción* y en C<sub>3</sub> tres *teoremas-en-acción*.

Dar muestras de poseer un *teorema-en-acción* menos elaborado se relaciona fuertemente con una noción débil de modelo de cuerpo rígido.

Se observa una zona intermedia muy poblada que interpretamos como una zona de “convivencia” de conceptos y relaciones “en desarrollo” a corto plazo si se los trabaja apropiadamente. Los niveles de conceptualización de cuerpo rígido: C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> y C<sub>4</sub> se corresponden prácticamente con todas las situaciones físicas (*teorema-en-acción*) halladas. Es decir, que presentar determinados rasgos necesarios para la construcción del modelo de cuerpo rígido no implica hacer uso de un único *teorema-en-acción*.

		Variedad de conceptos-en-acción principalmente							
		C	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	Total	[%]
Variedad de teoremas-en- acción	S F								
	1	2	1	–	–	–	3	14	
	2	–	–	–	–	–	0	0	
	3	2	–	–	–	–	2	10	
	4 y 5	2	–	2	11	1	16	76	
	Total	6	1	2	11	1	21	100	
[%]	28	5	10	52	5	100			

Tabla N°2: Frecuencias de categorías elaboradas para interpretar conocimiento-en-acción desde la situación física vs. la conceptualización del modelo de cuerpo rígido: Año 2002.

El 26% (C<sub>4</sub> y C<sub>5</sub>) de los estudiantes en el curso 1998 parece haber consolidado profundamente el modelo de cuerpo rígido (cuadrante inferior derecho). Este resultado puede decirse que es bueno para cursos en los que es frecuente la confrontación con situaciones nuevas (o parcialmente nuevas). Sin embargo, en el curso 2002 es ahora el 57% de los estudiantes el que ha logrado una buena aproximación a la visión científica consensuada. El nivel de representación (5, C<sub>4</sub>) resultó por lejos el más numeroso.

Si contrastamos con el 52% (SF: 4 y 5) en 1998 y el 76% en 2002, respectivamente, se puede decir que la calidad de la representación más relacionada a la forma predicativa se ha

mostrado restringida (específica) en conexión con la calidad de la forma operatoria. Esto muestra cierta independencia en la variación de los conceptos-en-acción del individuo. Es decir, la situación física puede tomar cualquier valor en las categorías más elementales de conceptos-en-acción. Mientras, según nuestros datos interpretamos que los teoremas-en-acción se muestran limitantes en relación a la presentación de soluciones.

Por todo lo cual, puede decirse que la calidad de las categorías de pensamiento consideradas como pertinentes (conceptos-en acción) está relacionada con la calidad de la resolución propuesta (ver histogramas 1 y 2).

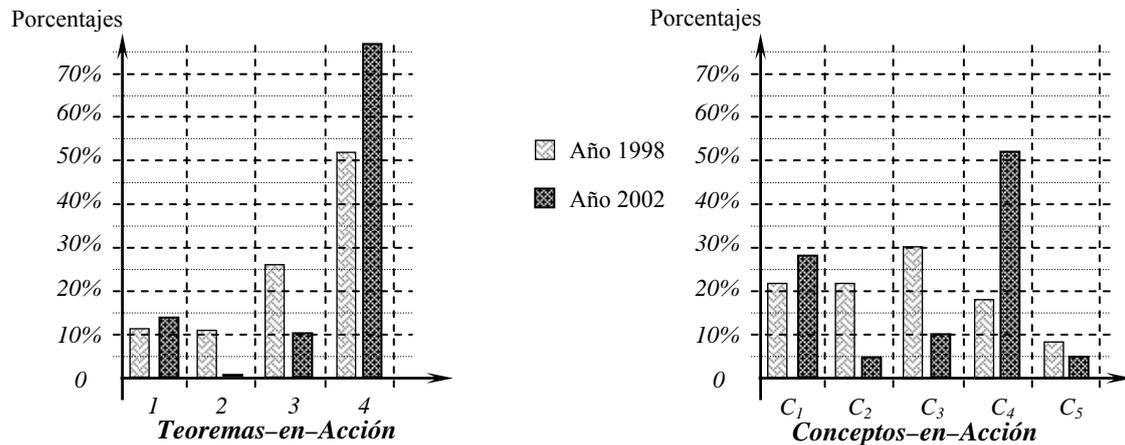


Figura N° 6: Histogramas que representan los valores de las tablas N° 1 y 2.

Parecería que tras esta aplicación hubo un corrimiento en la distribución de los estudiantes. Corrimiento que podría visualizarse en dos dimensiones principalmente, hacia: (a) un mayor grado de elaboración en los teoremas-en-acción (proposiciones consideradas como verdaderas *sobre lo real*) y (b) un mayor grado de elaboración en la concepción del modelo de cuerpo rígido; además de una mejor integración de ambos métodos de solución en una noción más profunda de interacción.

Opacan relativamente estos resultados la cantidad de alumnos que no resuelven. Sin embargo, si calculamos porcentajes en base al total de evaluaciones parciales, los valores siguen favoreciendo al grupo 2002. No debemos olvidar que este problema forma parte de una evaluación con cinco ítems más, siendo éste el último. El alumno puede haber decidido no hacerlo, por falta de tiempo; o bien, simplemente por ya haber respondido los ítems restantes. Se trataría de una cuestión de actitud, que quizá haya que trabajar más. Sin embargo, aquellos que decidieron aportar una solución de mejor calidad fueron significativamente más.

### Conclusiones e implicaciones didácticas

La resolución de situaciones problemáticas nuevas y parcialmente nuevas requiere de significados. Aprender es adquirir información utilizable a modo de instrumental conceptual que facilite dicha resolución de problemas. En este estudio el constructo de conocimiento-en-acción ha sido central para comprender cómo la resolución de problemas tiene sus bases en una representación conceptual o cuasi-conceptual de la realidad y cómo habilita el análisis de los procedimientos, sobre todo, en términos físicos. Un aspecto interesante desde la riqueza conceptual del análisis y de los razonamientos de los estudiantes ha sido la identificación y significación de la dependencia e independencia de abundante y compleja información.

Nuestros hallazgos sugieren que la capacidad de los estudiantes de generar soluciones se ha debido a la puesta en escena de ciertas representaciones mentales. Como resultado del análisis se

han construido cinco categorías para el constructo *modelo de cuerpo rígido* desde la perspectiva de las fuerzas y energía asociadas. Las nociones de teorema y concepto-en-acción se han mostrado muy fértiles a la hora de precisar y detallar lo antes dicho. Lo que se ha desarrollado en los estudiantes son formas de organización de la actividad más eficientes, lo que redundaría en la adquisición de concepciones y competencias específicas. Una competencia general que se ha buscado desarrollar es la resolución de problemas y creemos que una competencia crítica (concepto acuñado por Vergnaud 2007) en este sentido, es la lograda por más estudiantes en este campo conceptual tras la aplicación de la propuesta 2002.

Se ha mostrado que las categorías más avanzadas (4 y 5 en nuestro caso) comparten un mismo teorema-en-acción estando la diferencia en la pertinencia y especificidad de los conceptos puestos en juego. Mientras en la categoría 3 pudimos hallar alumnos que aparentemente poseen los conceptos necesarios y suficientes, sin embargo, no llegan a una solución concensuada científicamente por carecer de teoremas pertinentes.

Cabría preguntarse: ¿en un dado campo conceptual la condición necesaria para la resolución de situaciones sería la presencia de conceptos relevantes? ¿y la condición suficiente serían las proposiciones que se tienen sobre lo real?

Por otro lado, los resultados obtenidos en otros trabajos (Escudero 2005, Escudero y Jaime 2007) complementan el actual. Precisamente en la dirección de advertir que aquellos individuos que parecen poseer los conceptos necesarios para resolver la situación problemática y donde la situación permite poner en juego distintos teoremas-en-acción con los que ofrecer una respuesta correcta; habría algunos de ellos que serían más fértiles y pertinentes.

*Se percibe fácilmente que tales formas no son equivalentes para los alumnos; son equivalentes matemáticamente, pero no conceptualmente ni cognitivamente* (Escudero 2005).

Por un lado, nos pueden llevar a un camino más económico cognitivamente hablando, y por otro, posibilitar la solución de una mayor variedad de situaciones. Por ejemplo, permitiendo independizarse de parámetros innecesarios, competencia crítica en el desarrollo de estructuras que implican la abstracción y la generalización.

Las observaciones de las acciones del alumnado en situaciones de aprendizaje trazan un largo camino entre la comprensión de la noción de cuerpo rígido y de su movimiento como una propiedad invariante y, también de la construcción y la comprensión de las ecuaciones para la determinación de la altura bajo ciertas condiciones de contorno. En ese camino y bajo la influencia de variaciones, se manifiestan distintas concepciones, se movilizan distintos procedimientos correctos e incorrectos de resolución, se utilizan diferentes modos de representación para comunicar esas concepciones y procedimientos.

La brevedad, la precisión, la determinación, el modelado, la reversibilidad (...) son inherentes a la Física Clásica, sobre todo, porque representan parte de la cultura científica que le es propia: una cultura amplia y práctica.

Las representaciones internas deberían concebirse como “modelos” dinámicos (en desarrollo) de la realidad que incluyen sólo algunos aspectos de la misma. Dicho laconismo generalmente implica haber avanzado desde formas más elementales. Los programas de simulación no se comportan “igual” que la realidad. Algo puede no haberse previsto en el “software”. Esta analogía mente-computadora posibilita la reflexión acerca de la complejidad de la resolución de problemas de lápiz y papel y pone en valor los aspectos relevantes de la misma, desmitificando el

todo o nada. Se requiere de conceptualización y modelización para enseñar y aprender Física y un sólo curso de un cuatrimestre no puede lograr todo.

### **A modo de cierre: comentarios generales**

Los teoremas y conceptos-en-acción revelan un campo promisorio de investigación en todas las áreas de la enseñanza de la Física y la resolución de situaciones problemáticas se está constituyendo en un potencial medio para efectivizarlo. Estamos asistiendo en los últimos tiempos a una tendencia en la investigación en Enseñanza de las Ciencias que ha privilegiado –y está privilegiando– más los procesos de comunicación involucrados en el aprendizaje.

Los conocimientos-en-acción, conocimientos tan personales y funcionales para los individuos que los construyen, son resistentes a los cambios. Modificarlos, en el sentido de transformarlos en otra concepción, no es una tarea trivial. Dejamos pendiente a modo de hipótesis que la enseñanza explícita de las velocidades angulares  $\omega_{\text{orbital}}$  y  $\omega_{\text{spin}}$  en relación a su no inclusión en la propuesta 2002 mejoraría nuestros resultados.

La fragilidad de la organización del conocimiento, la desvalorización de las condiciones de contorno, la ausencia de conceptos y relaciones estructurantes y/o estructurales reciben como resarcimiento un aprendizaje insustancial, carente de estructuras que posibiliten seguir creciendo.

*Esa trascendencia atribuida al simbolismo no impide que, en el fondo, la acción del sujeto en situación constituya la fuente y el criterio de la conceptualización en el campo de la Física.* (Escudero 2005)

Los resultados empíricos sugieren la posibilidad de movilidad de conceptos y teoremas-en-acción generados por propuestas como ésta. Generalmente cuando los docentes enseñamos, sobre todo aspectos teóricos, hacemos únicamente hincapié en estrategias para consolidar “formación de conceptos”. Por otra parte, a pesar del importante despliegue hecho bajo formas operatorias, ellas en sí mismas son insuficientes para alcanzar la conceptualización. Es necesario que evolucionen conjuntamente con las formas predicativas, parece que de un modo distinto.

*Los conocimientos de los alumnos fueron moldeados por las situaciones que ellos enfrentaron y dominaron progresivamente, sobre todo las primeras situaciones susceptibles de dar sentido a los conceptos y procedimientos que se ha pretendido enseñarles* (Vergnaud 1990). Para este autor la historia –desde la primera situación que se enfrenta respecto de un tema– es decisiva para las construcciones futuras; y precisamente, el movimiento físico ha tenido que ver con nosotros desde siempre.

### **Referencias**

ADURIZ-BRAVO, A. ; MORALES, L. (2002) “*El concepto de modelo en la enseñanza de la física consideraciones epistemológicas, didácticas y retóricas*” Cad. Brás. Ens. Fís., v19(1), pp.79-92.

BAGNO, E.; EYLON, B. & GANIEL, U. (2000) “From fragmented knowledge to a Knowledge structure: linking the domains of mechanics and electromagnetism”. Physics Education Research American Journal of Physics Supplement, 68 (7), pp..

COSTA, S. y MOREIRA, M. A. (2002) *O papel da modelagem mental dos enunciados na resolução de problemas em Física*. Revista Brasileira de Ensino em Física, São Paulo, 24 (1), pp. 61-74.

COSTA, S. y MOREIRA, M. A. (2003) *Identificação de conhecimentos em ação na Aprendizagem de Física*. Actas IV Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências (CD-ROM), Bauru, São Paulo, 25-29 nov 2003.

DHILLON, A. S. (1998) “*Individual differences within problem-solving strategies used in Physics*”. Science Education, 82: 379-405.

ERICKSON, F. (1989) *Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza*. En Wittrock, M. *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona: Paidós.

ESCUDERO, C. (2001) “*Representaciones, modelos mentales y su relación con omisiones, aciertos y errores de actuación al resolver un problema de Física*”. Enseñanza de las Ciencias, Número Extra, VI Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias, Barcelona (España).

ESCUDERO, C. (2009) Las leyes de conservación y el mundo físico: un estudio de caso desde la teoría de los campos conceptuales. *VIII Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias*, Barcelona (España). [Enviado]

ESCUDERO, C. y JAIME, E. (2002) “*La comprensión de la situación física en la resolución de un problema integrativo*”. Actas en CD VI SIEF, Corrientes (Argentina).

ESCUDERO, C. y JAIME, E. (2003) “*Elementos para una conceptualización de la noción de cuerpo rígido en la resolución de un problema integrativo*”. Actas en CD (REF XIII), Río Cuarto (Córdoba, Argentina).

ESCUDERO, C. y MOREIRA, M. A. (2004) *La investigación en resolución de problemas: una visión contemporánea*. Programa Internacional de Doutorado em ensino de Ciências (PIDEC). Texto de Apoio Nº 23 da Universidade de BURGOS/UFRGS. Publicado en *Actas del PIDEC*, vol. 6, 41-90. Publicación en modalidad libro.

ESCUDERO, C. (2005) *Inferencias y modelos mentales: un estudio de resolución de problemas acerca de los 1º contenidos de Física abordados en el aula por estudiantes de nivel medio*. Tesis doctoral. Universidad de Burgos (España).

ESCUDERO, C.; MOREIRA, M. A. y CABALLERO, C. (2009) *A research on undergraduate students' conceptualizations of physics notions related to non-sliding rotational motion*. Lat. Am. J. Phys. Educ. (LAJPE), Vol 3, Nº 1, pp. 1-8.

ESCUDERO, C. y JAIME, E. (2007a) “*La comprensión de la situación física en la resolución de una situación problemática. Un estudio en dinámica de las rotaciones*”. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 6 (1). <http://www.saum.vigo.es/reec>

ESCUDERO, C. y JAIME, E. (2007b) “*Sonority as variation: study about the conceptualization of physical notions in university students*” Journal of Physics Conferences Series (JPCS), 90 012021. IOP Publishing. <http://www.iop.org/EJ/article/1742-6596/90/1/012021/>

FRANCHI, A. (1999). Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. En Alcântara Machado, S. D. et al. *Educação Matemática: uma introdução* (pp. 155-195). São Paulo, EDUC.

GLASER, B. y STRAUSS, A.L. (1967) *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative*

*research.* (Chicago: Aldine).

GRECA, I. M. y MOREIRA, M. A. (2002) *Além da detecção de modelos mentais dos estudantes. Uma proposta representacional integradora.* Investigações em Ensino de Ciências. Brasil, Vol. 7 (1). Site: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>

GUISASOLA, J.; CEBERIO, M. y ZUBIMENDI, J. L. (2003) *El papel científico de las hipótesis y los razonamientos de los estudiantes universitarios en resolución de problemas en Física.* Investigações em Ensino de Ciências, Brasil, 8 (3). Site: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>.

JOHNSON-LAIRD, P. (1983) *Mental models.* Cambridge: Cambridge University Press.

JOHNSON-LAIRD, P. (1990) *El ordenador y la mente.* Barcelona: Paidós.

MARAFIOTI, R. (2004) *Charles S. Peirce: El éxtasis de los signos.* Bs As: Editorial Biblos.

MARTÍN, J. y SOLVES, J. (2001) *Diseño y evaluación de una propuesta para la enseñanza del concepto de campo en física.* Enseñanza de las Ciencias, 19(3), 393-404.

MOREIRA, M. A. (2002) *A teoria dos campos conceituais de Vergnaud.* Investigações em Ensino de Ciências. Brasil, Vol. 7 (1). Site: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>

STUBBS, M. (1983) *Análisis del discurso.* Madrid: Alianza.

VALLES, M. (1999) *Técnicas cualitativas de investigación social.* Madrid: Ed. Síntesis.

VERGNAUD, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170.*

VERGNAUD, G. (1994). *Multiplicative conceptual field: what and why?* En Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: State University of New York Press.

VERGNAUD, G. (1996). *Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. Perspectivas, 26(10): 195-207.*

VERGNAUD, G. (1998). *A comprehensive theory of representation for mathematics education. Journal of Mathematical Behavior, 17(2): 167-181.*

VERGNAUD, G. (2007) *Campos conceptuales.* Minicurso en 1º Encuentro Nacional de Educación en Matemática (1ENEM), Tandil (Bs. As.).

Nota: Parcialmente financiado por CICITCA (UNSJ, Argentina).

## ANEXO

La esfera rueda sin deslizar partiendo de una posición “A” con velocidad cero. El teorema de conservación de la energía mecánica sólo vale para un grupo limitado de interacciones: las conservativas. El trabajo de la  $\mathbf{fr}_s$  es cero en el movimiento de rodadura sin deslizamiento, por ser la  $\mathbf{fr}_s$  la responsable, ya que el reposo que está asociado es el reposo relativo de las superficies en contacto y la velocidad relativa de deslizamiento del punto de contacto del sólido en relación a la superficie será nula en cada instante, a medida que el sólido rota. Consecuentemente, en este caso, la  $\mathbf{fr}_s$  no sería una fuerza disipativa. Las reacciones de vínculo cuyo trabajo siempre es nulo, por ser siempre perpendiculares a los desplazamientos sobre los vínculos, no intervienen tampoco en la expresión de la energía mecánica de un cuerpo. Es decir, la condición de velocidad nula en el punto de contacto con la pista se expresa:  $v_{CM} = \omega r$ .

Notar que en el teorema de conservación de la energía no interviene la forma de la trayectoria, sino sólo el punto inicial y el final (su altura relativa). Durante el movimiento bajo fuerzas conservativas, la energía cinética y la potencial pueden variar, pero siempre de forma tal que su suma permanezca constante. Al analizar el movimiento de un sólido “rígido”, podemos ignorar su estructura interna y suponer que su energía interna no cambia.

Con fines prácticos, la distancia entre dos partículas de un sólido rígido no cambia durante el movimiento, de modo que podemos suponer que su energía potencial interna es constante. En consecuencia, no tenemos que tomarla en cuenta cuando se analiza el “intercambio” de energía del sólido con sus alrededores, reduciéndose a la energía cinética y a la energía potencial asociada con las fuerzas externas. Este resultado es parecido al obtenido para una sola partícula. Sin embargo, surge una primera diferencia en cuanto a la manera de considerar la energía cinética. Pueden aparecer dos términos completamente independientes. El primero correspondiente a la energía cinética traslacional debida al movimiento del centro de masa –CM– y el segundo a la energía cinética debida a la rotación del cuerpo alrededor del CM. O bien, otro modo de resolver el mismo problema consiste en aprovecharse del hecho de que un cuerpo que rueda sin deslizar en un cierto instante puede considerarse que está rotando alrededor del punto de contacto, por tanto está siempre en reposo relativo.

Consideremos un sólido rígido de masa “ $m$ ” y radio “ $r$ ” que rota alrededor de un eje con velocidad angular interna<sup>8</sup> –o de spin–  $\omega_s$ . Si a este movimiento de rotación le superponemos un movimiento de traslación caracterizado por la velocidad del centro de masas  $\mathbf{v}_{CM}$  (la misma para todos los puntos), la velocidad de cada punto será, de acuerdo con la superposición de movimientos independientes:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{CM} + \omega_s \times \mathbf{r}$ . Como la esfera rueda sin resbalar sobre la pista, ese movimiento lo podemos considerar como un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el CM de la esfera, al cual está superpuesto el movimiento de traslación del eje, de velocidad  $\mathbf{v}_{CM}$ . Ahora, este movimiento también se puede considerar como una rotación pura instantánea alrededor de la “generatriz” o el punto de contacto, con la misma velocidad angular  $\omega_s$ .

Pero, además la situación problemática en análisis es más compleja todavía. La  $\mathbf{v}_{CM}$  está asociada también con la velocidad angular orbital  $\omega_o$ , pudiendo expresarse también como:  $\mathbf{v}_{CM} = \omega_o \times \mathbf{R}$ . Esta doble asociación de la velocidad del centro de masa con la velocidad angular de spin por un lado y con la velocidad angular orbital por otro debe estar convenientemente diferenciada. Esta diferenciación tiene precisamente importancia en el caso de un sistema de cuerpos rígidos, no

<sup>8</sup> Se utilizan términos como velocidad angular interna (o de spin) –relacionada con un eje de rotación que pasa por el CM – y velocidad angular orbital –vinculada con el movimiento de traslación del CM del rígido en una trayectoria curvilínea – planteados por autores de textos universitarios básicos (Alonso y Finn 1976, 1995; Roederer 1963, 2002) para su diferenciación.

puntuales, en interacción. En la figura N°7 se muestra en perspectiva el plano vertical del rizo para ambas velocidades angulares:  $\omega_s$  y  $\omega_o$ . Notar que poseen igual dirección, pero sentidos opuestos.

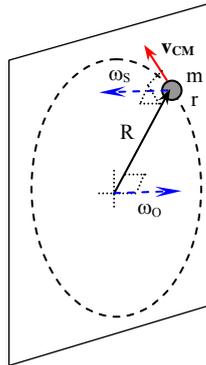


Figura N° 7: Diagrama que contiene velocidad del centro de masa del cuerpo ( $v_{CM}$ ), velocidad angular orbital ( $\omega_o$ ) y velocidad angular de spin ( $\omega_s$ ).

Una descripción completa de la evolución requerirá, en última instancia, un conocimiento detallado del tipo de interacciones intervinientes. Tanto para responder la cuestión (a) como la (b) se necesitan “expresar” significados fundamentalmente mediante dos ecuaciones básicas: una que involucra el teorema de conservación de la energía mecánica y otra, la segunda ley de Newton aplicada al CM de un rígido en movimiento:

$$(a) \text{ En P: } \begin{cases} \Sigma F_y = P + N = m v_{cm}^2 / R \\ \Delta E_M = mg (2R - H) + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega_s^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ó } \begin{cases} \Sigma F_y = P + N = m \omega_o^2 R \\ \Delta E_M = mg (2R - H) + \frac{1}{2} I_{EIR} \omega_s^2 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \text{ En Q: } \begin{cases} \Sigma F_x = N = m v_{cm}^2 / R \\ \Delta E_M = mg (R - 6R) + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega_s^2 = 0 \end{cases}$$

condiciones de contorno:  $N=0$  y  $V_{min} \neq 0$  para el apartado (a) del problema, donde  $I_{CM} = \frac{2}{5} m r^2$  ;  $I_{EIR} = \frac{2}{5} m r^2 + m r^2$