¿EN QUÉ SENTIDO LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES PUEDE AYUDARNOS PARA FACILITAR APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO?[1]
(In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning?)

Gérard Vergnaud [gerard.vergnaud@univ-paris8.fr]
Conception, création, competences et usages.Laboratoire Paragraphe
Université Paris 8 .2, rue de la Liberté .93526 Saint-Denis Cedex

Resumen

Un alumno expresa sus conocimientos científicos a la vez por su manera de atuar en situación (forma operatoria), y por los enunciados y explicaciones que es capaz de expresar (forma predicativa). El sentido está en la actividad que desarrolla y no solamente en las formas lingüísticas que enuncia. El concepto de situación didáctica va a la par con el de actividad en situación, y más precisamente con el concepto de "esquema". Conceptualizaciones importantes están contenidas en los esquemas. La perspectiva de desarrollo cogniivo, herdada de Piaget y de Vigotski, es una referencia indispensable para seguir analizando, a largo y mediano plazo, las filiaciones y rupturas. Pero el lugar de contenidos científicos y sus epistemologías propias, es más importante que no que han reconocidos estos dos autores. Se presentan ejemplos, particularmente, de estruturas aditivas.
Palabras-clave: campo conceptual, conceptualización, forma operatoria, forma predicativa, aprendizaje significativo.

Abstract

A student expresses his/her scientific knowledge simultaneously through his/her way of acting in situation (operative form), and through statements and explanations that she/he is able to communicate (predicative form). The sense is in the activity that she/he develops and not only in the liguistic forms that he/she enunciates. The concept of didactic situation goes together with that of activity in situation, and more precisely with the concept of "scheme". Important conceptualizations are contained in the schemes. The perspective of cognitive development, inherited from Piaget and from Vygotski, is an indispensable reference to continue analyzing in the long and medium terms, the filiations and breaks. But the place of the scientific contents and its own epistemologies it's more important than what these two authors have recognized. Examples are given particularly in the field of additive structures.
Keywords: conceptual field, conceptualization, operative form, predictive form, meaningful learning.

Introducción

Para Piaget, el conocimiento es adaptación; y añade asimilación y acomodación: asimilación del nuevo conocimiento al antiguo, y acomodación a lo que no ha sido previsto antes, es decir, a la contingencia.

[1] Ponencia presentada por Gèrard Vergnaud, en el V Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo, celebrado en Madrid, 11-15 septiembre de 2006. Publicada en francés en las Actas de ese evento. Traducida por Concesa Caballero.

Nosotros hemos tenido hoy un buen ejemplo de contingencia, pues los traductores no han llegado; y también un buen ejemplo de adaptación pues un colega participante en el Encuentro, nos ha prestado su colaboración para comenzar la conferencia. Yo le agradezco calurosamente que se haya ofrecido para traducir mi exposición.

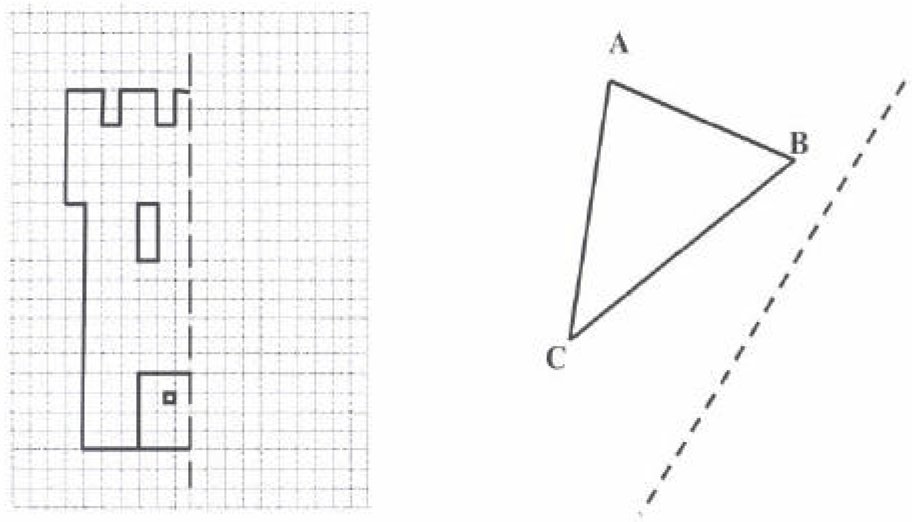
Yo hice mi tesis con Piaget; reconocerán fácilmente su herencia en mi exposición, aunque transformé un poco y adapté sus ideas, a la luz de mi propia experiencia. He leído con pasión el libro de Vygotski "Pensamiento y lenguaje" publicado 1985. Había leído la traducción en inglés, que apareció en 1982, pero no me impresionó tanto como la traducción francesa de François Sève, en 1985. La traducción inglesa estaba amputada en numerosas partes de la obra, particularmente las que se refieren al marxismo, y probablemente, yo no estaba suficientemente maduro, ni mi experiencia anterior me permitía sacar el mejor provecho. Piaget y Vygoyski se interesan los dos por el desarrollo y la larga duración del desarrollo; sus convergencias son grandes. Es cierto que Piaget enfatiza más la actividad del sujeto que la cultura, pero es perfectamente consciente del rol de la cultura en el desarrollo cognitivo del niño. Vygotski, prioriza el peso de la cultura y los procesos de mediación, asegurados por el adulto, en vista de la apropiación de la cultura por el niño, pero él es también uno de los padres de la teoría de la actividad: da al lenguaje y al simbolismo un rol esencial de mediación.

La mediación es un proceso incontrolable en la educación; pero es necesario analizar en qué consisten los actos de mediación del profesor en la enseñanza, actos que van más allá de los actos del lenguaje. Debo añadir que mi experiencia como investigador en didáctica me ha permitido ver las cosas de manera diferente a Piaget, que no se interesó por los conocimientos escolares, y a Vygotski, que si bien se ha interesado, no entró suficientemente en el análisis de los contenidos conceptuales. La didáctica sí que lo hace, y esto nos lleva muy lejos.

Permitidme establecer, de inmediato, la distinción entre **la forma operatoria del conocimiento**, que permite actuar en situación (y tener éxito eventualmente), y la **forma predicativa del conocimiento**, que enuncia los objetos de pensamiento, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones. La ciencia está hecha de textos. Esta es una dimensión esencial, pero los textos sólo dan cuenta imperfectamente del conocimiento operatorio, que se pone en acto en situación.

A continuación, tomemos el ejemplo de dos situaciones (ver Fig.1 a y b), que se refieren a la simetría ortogonal. En la primera situación, que se podría presentar a niños de 8 ó 9 años, se trata de completar la fortaleza, dibujando a la derecha, la parte simétrica de la mitad de la fortaleza ya dibujada. Las habilidades manuales necesarias no son despreciables: con el lápiz, partir de un punto cierto, detenerse en un punto cierto, dibujar exactamente la raya encima de la raya de la cuadrícula… Pero los conocimientos propiamente geométricos no son demasiado complejos, ya que todos los ángulos son rectos y que la cuadrícula facilita mucho la organización de la actividad del alumno: un paso a la izquierda sobre la figura de la derecha, un paso a la derecha sobre la figura de la izquierda; dos pasos descendiendo sobre la figura de la izquierda, dos pasos descendiendo sobre la de la derecha etc..

En la segunda situación, que apenas seria adecuada para alumnos de 12 ó 13 años, el problema es mucho más difícil ya que es necesario utilizar los instrumentos de la geometría, como son la escuadra graduada, la regla y el compás (cuyas propiedades aquí son aún más complejas que las de la escuadra). Se ve así que la tarea "trazar la simetría de…" puede presentar dificultades contrastadas en función de la figura y de los instrumentos disponibles. Por consiguiente, la forma operatoria del conocimiento desciende a niveles de desarrollo muy diferentes, en función particularmente de los conocimientos necesarios para la acción y la utilización de los instrumentos (ejes de simetría, propiedades de los puntos homólogos etc.).



(a) (b)

Figura 1. Situaciones sobre simetría ortogonal

Pero se puede decir lo mismo para la forma predicativa del conocimiento. He aquí cuatro enunciados relativos al campo conceptual de la simetría:

1. *La fortaleza es simétrica.*
2. *El triángulo A´B´C´ es simétrico del triángulo ABC con relación a la recta d.*
3. *La simetría conserva las longitudes y los ángulos.*
4. *La simetría es una isometría.*

En los dos primeros enunciados, el concepto de simetría funciona como un predicado: para un lugar en el primer enunciado, para tres en el segundo. En el tercer enunciado, lo que ~~se~~ era predicado se convierte en objeto: la simetría. Además este nuevo objeto de pensamiento, a su vez, tiene propiedades: la conservación de las longitudes y de los ángulos; por último, el cuarto enunciado expresa una relación de inclusión entre dos conjuntos: las simetrías y las isometrías; en este paso el predicado relativo a la conservación de las longitudes y los ángulos del tercer enunciado, se convierte en un objeto de pensamiento. Se ve como los conceptos se construyen apoyándose unos en otros, y que el lenguaje permite, mejor que cualquier otro proceso, la identificación de los objetos que no corresponden directamente a ninguna percepción. Apoyando el punto de vista de Vygotski, se puede decir que la mediación a través del lenguaje, es un proceso ineludible en la enseñanza de las ciencias. La enseñanza es irremplazable. Pero esto no significa que su rol se limite a poner en palabras el contenido conceptual de los conocimientos.

El primer acto de mediación de la enseñanza es, en efecto, la elección de la situación a proponer a los alumnos. En la zona de desarrollo proximal, existen filiaciones y rupturas. El profesor puede encontrar oportuno poner en juego la filiación y promover que el alumno pase de una clase de situaciones a otra, próximas entre si, y para que el paso de una a otra se haga sin dificultad, es decir, se pueda ver espontáneamente. Sin embargo, el profesor, puede también considerar oportuno poner en juego la ruptura, de manera que provoque desequilibrio entre la situación a tratar y las competencias de los alumnos, y hacerles tomar conciencia de los límites de sus puntos de vista actuales.

Si no se desestabiliza a los alumnos, no tienen ninguna razón para aprender. Es verdad también que si se les desestabiliza demasiado, no aprenden más. El principio de adaptación de Piaget funciona muy bien aquí; por otra parte, la idea de desarrollo próximo de Vygotsky , incita a la prudencia.

¿Quién se adapta? y ¿a qué?

Es evidente que es la actividad quien se adapta, pero es necesario un cuadro teórico para analizar la actividad. Esto es lo que me ha conducido a retomar y a desarrollar el concepto de esquema, y a definir mejor aquello a que se dirige un esquema: se dirige a las situaciones. Piaget, Vygotsky o Ausubel, ~~no~~ estaban interesados en mirar cómo y en qué condiciones el sujeto intenta comprender los objetos y los fenómenos nuevos. Pero no resaltaron, con suficiente fuerza, el acoplamiento teórico esquema/situación, que es la piedra angular de la psicología de las competencias complejas y, desde mi punto de vista, de la didáctica. Más tarde volveré sobre este punto, cuando defina el concepto de esquema, pero quiero añadir de inmediato las razones que me motivaron a estudiar los campos conceptuales:

- no se puede estudiar el desarrollo de un concepto de manera aislada, porque siempre está tomado de un conjunto, formando un sistema;
- la conceptualización es un proceso que forma parte de la actividad, y es necesario, pues, captar las conceptualizaciones que operan en los esquemas, tanto si son explícitas como implícitas; esto es lo que me ha conducido a dar tanta importancia al concepto de invariante operatorio;
- en una perspectiva de desenvolvimiento, un concepto es un triplete de conjuntos: un conjunto de situaciones, un conjunto de invariantes operatorios, un conjunto de formas lingüísticas y simbólicas.

Sin esquemas y sin situaciones no se puede comprender el desarrollo del pensamiento. En la misma situación de la vida, sea la vida escolar o la profesional, se desarrollan competencias en varios registros: los gestos, los conocimientos y competencias científicas y técnicas, la interacción con los otros, las competencias lingüísticas, las competencias afectivas. Incluso cuando estamos interesados por un solo registro, sabemos que los otros registros de la actividad, pueden jugar un gran rol. Los jefes de las empresas, por ejemplo, se sorprenden a veces cuando oyen hablar de competencias afectivas y, sin embargo, muchos ejemplos muestran, no solamente su importancia en las relaciones entre personas, sino también sus efectos sobre la eficacia de la actividad. Por ejemplo, los jóvenes ingenieros del departamento de concepción de los lanzamientos espaciales, en la Aerospacial, a que se les pide expresar las principales cualidades de los expertos a quienes van a pedir consejo, ponen casi siempre por delante su mayor o menor capacidad de escucha y atención, su posibilidad de ponerse en el lugar de los jóvenes ingenieros; y esto incluso antes de sus competencias como experto.

Como ejemplos de esquemas, para mostrar la generalidad del concepto, mencionaré un esquema que concierne a los niños pequeños, el esquema de enumeración, y un esquema que concierne a profesionales adultos, la poda de la vid. La organización de la actividad de enumerar en el niño, es relativamente fácil de describir: uno, dos, tres, cuatro.. ¡cuatro!. Su organización se apoya en dos conceptos matemáticos que están totalmente implícitos:

- El de *correspondencia biunívoca*, entre los objetos a enumerar, los gestos del brazo y de la mano, los gestos de la voz, y los gestos de la mirada, que aseguran justamente el carácter exhaustivo y exclusivo del enumerar. Esta actividad organizada de la mirada es, con frecuencia, lo que falta a los niños que tienen dificultades.
- El de *cardinal*, que toma la forma de la repetición de la última palabra-nombre, ¡cuatro!, en el ejemplo anterior.

Es necesario saber que existe una cierta independencia entre los dos conceptos, pues se encuentran niños que no se equivocan entre los tres registros de gestos, pero que no cardenalizan, y niños que cardenalizan pero los gestos que jalonan la actividad no están bien coordinados (van demasiado rápidos o demasiado lentos en un registro). Esto me conduce a señalar que el desarrollo de las competencias no obedece a un orden total, sino solamente a un orden parcial, no conexo.

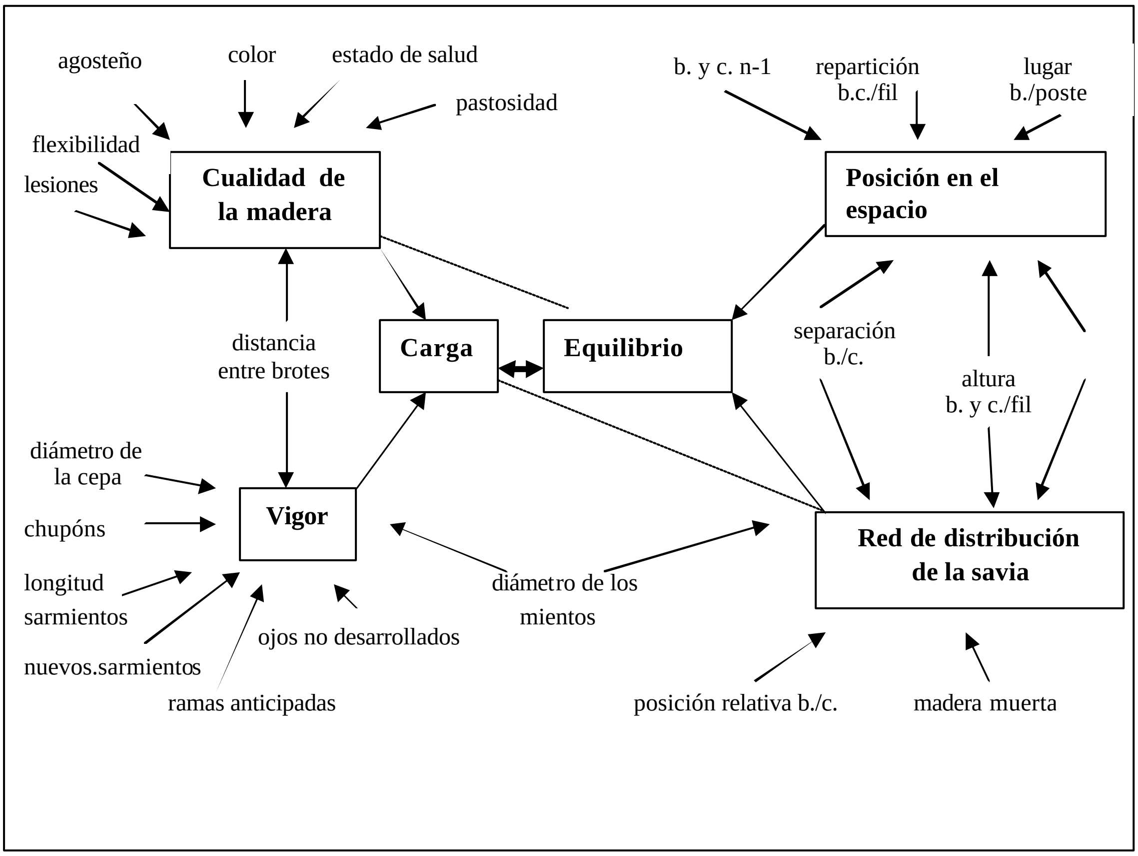
La poda de la viña es altamente simbólica en Francia, teniendo en cuenta nuestro amor por el vino. El trabajo de investigación y análisis de Sylvie Caens Martin es notable. Era necesario observar e interrogar a los podadores, poner en evidencia las categorizaciones efectuadas implícitamente en el curso de la actividad: funcionan importantes distinciones, entre cepas derechas y curvadas, entre *coursons* (rama de viña tallada y guillotinada con tres o cuatro ojos) bien colocados y *coursons* mal colocados, entre armazón ligero y armazón fuerte. Estas distinciones son funcionales en razón de los problemas de provisión de la savia, de los posibles obstáculos entre filas y entre pies de la viña, entre posibilidades de evolución en el año y más allá. Pero ¿dónde se sitúa el límite entre cepa derecha y cepa curvada, entre *coursons* más o menos bien colocados, entre armazón ligero o fuerte? Además el podador de la viña interpreta lo que él ve como resultado de la poda del año anterior, incluso de dos años precedentes, y anticipa además los efectos a uno o dos años de la poda que él efectúa actualmente, especialmente en el caso en el que intenta subsanar defectos de la cepa que está podando. La viña es una planta ácrona, que se desarrolla por las extremidades y muy rápidamente. Son necesarios quince años para que la viña dé su mejor vino; el podador puede podar hasta 800 cepas durante el día. Ya he dicho suficiente para comprender la importancia crucial de la poda.

Pero ¿qué es de la conceptualización? Sylvie Caens Martin ha podido organizar un mapa de conceptos implicados en la poda de la viña.

Los dos invariantes operatorios que subyacen a la actividad de podar la viña son los de *carga* y *equilibrio*: "carga" para la idea de que el sarmiento no debe soportar de ordinario, más de un racimo y medio; "equilibrio" para la otra idea de que la cepa debe desarrollarse en varios planos y direcciones, sin invadir las filas y las cepas vecinas. Este status particular de los conceptos-en-acto, que son formulados en las comunicaciones entre podadores, conduce a hablar de "conceptos pragmáticos" según Pastré.

No todos los invariantes operatorios vienen de los conceptos pragmáticos, ya que no todos son formulados y adoptados por la comunidad profesional que los utiliza. Pero todos se forman largamente en la experiencia, la cual aporta una contribución incontorneable al desarrollo. Esto no significa que la experiencia sea en sí misma suficiente: la formación continua contribuye también al desarrollo, particularmente al poner palabras a la experiencia, por la toma de conciencia metacognitiva, por los aportes de conocimientos nuevos; la formación inicial misma, aporta a los futuros profesionales categorías y operaciones de pensamiento, que les permiten leer su experiencia de una manera más eficaz.

En la Fig.2 , se presentan los conceptos esenciales relacionados con la actividad de la poda de la viña, así como algunos de los invariantes operatorios.



Fig, 2. Invariantes operatorios subyacentes a la actividad de podar la viña

La cuestión de la competencia y de los esquemas organizadores de la actividad

Las empresas hoy, están muy preocupadas por la cuestión de las competencias: ¿cómo detectarlas, cómo desarrollarlas? En esta idea de competencias es necesario ver una idea de relación de orden; he aquí algunas definiciones, complementarias, unas de las otras, y destinadas a especificar el concepto, con relación a una clase de situaciones:

1- A es más competente que B si sabe hacer alguna cosa que B no sabe hacer.
A es más competente en el tiempo t´que en el tiempo t, si sabe hacer ahora lo que no sabía hacer antes.

2- A es más competente si se comporta de una mejor manera.

3- A es más competente si dispone de un repertorio de recursos alternativos que le permiten adaptar su conducta a las diferentes situaciones que se pueden presentar.

4- A es más competente si está menos desprovisto ante una situación nueva.

Este concepto de competencia es muy importante en el trabajo, especialmente la última definición, dado que los hombres y las mujeres están cada vez más confrontados a la resolución de problemas. Es además una idea válida igualmente para la educación. Pero la idea de resolución de problemas no tiene sentido en sí misma, y no se la debe oponer a la de conocimiento: en efecto, sin conocimiento, no se tienen medios para enfrentar las situaciones nuevas; de manera análoga, se puede decir que el concepto de competencia no es un concepto científico él solo; es necesario añadirle el de la actividad y son necesarios conceptos teóricos para analizar la actividad. Este es el rol que doy al concepto de esquema.

El concepto de esquema viene de Kant, pero éste reservó su empleo para las cuestiones de espacio y tiempo. A principio del siglo XX, los filósofos neo-kantianos, como Revault d'Allonnes ampliaron su sentido, pero apoyándose sobre todo en la percepción, e incluso en la apercepción, es decir, sobre una toma de información rápida, pero suficiente para que se opere una identificación (da el ejemplo de una bonita mujer que pasa). El profundiza así un pocoen el contenido conceptual de las situaciones y de los objetos cotidianos, y no se atiene al espacio y al tiempo. Es Piaget quien, desde mi punto de vista, da el paso decisivo en la dirección de la actividad: en efecto, estudiando la actividad de los bebés, los gestos necesarios para coordinar los movimientos de las manos y de los ojos, en función del objetivo investigado, es como él comprende la racionalidad progresivamente construida de la actividad gestual. Se puede subrayar de paso que, en el mismo periodo, muestra que el bebé construye el concepto de objeto invariante, a través del cambio de perspectiva, y la desaparición detrás de una pantalla. Esta idea será tomada más tarde por Piaget, para la conservación de cantidades discretas y cantidades continuas. En un universo en perpetuo cambio, es necesario identificar bien objetos y propiedades que permanezcan estables: de donde el concepto de invariante operatorio, al que he dado un sentido muy general, y un lugar más amplio a como fue entendido por Piaget. Esto es muy importante para el estudio del aprendizaje de las Matemáticas y de las Ciencias, ya que la ciencia, en efecto, busca comprender las transformaciones de lo real, considerando sistemáticamente lo que varía y lo que no varía, y en qué condiciones. Como para esto necesitamos identificar lo que, en la actividad, corresponde a una función de conceptualización, he redefinido el concepto de esquema de manera más rigurosa y más analítica, sin apartarme, creo, de las ideas que Piaget tenía en la cabeza.

1- Un esquema es una totalidad dinámica funcional

2- Un esquema es una organización invariante de la actividad para una clase definida de situaciones.

3- Un esquema comprende necesariamente cuatro categorías de componentes:

-un objetivo(o varios), sub-objetivos y anticipaciones.

-reglas de acción, de toma de información y de control.
-invariantes operatorios (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto)
-posibilidades de inferencia.

4- Un esquema es una función que toma sus valores de entrada en un espacio temporalizado de n dimensiones, y sus valores de salida en un espacio igualmente temporalizado a n´ dimensiones (n y n´muy grandes)

La primera definición corresponde bastante bien al contenido de la reflexión de Piaget, ya que éste hacia del esquema una forma dinámica, próxima de lo que los gestaltistas habían reconocido para la percepción. La segunda definición va un poco más lejos y me ha sido sugerida por el concepto de algoritmo: una regla que permite tratar todo problema de una clase definida de antemano, bien llegando a una solución en un número finito de pasos, o mostrando que no hay solución. Los algoritmos son esquemas, pero los esquemas no son todos algoritmos. Añado el comentario de que es la organización de la actividad la que es invariante, no la actividad; el esquema no es un estereotipo. Además el esquema se dirige a una clase de situaciones; es pues un universal, incluso si esta clase de situaciones es pequeña, como es el caso en los primeros momentos de comprensión de un campo conceptual nuevo.

La tercera definición es analítica y va más lejos de lo que Piaget, Vygotsky, y Bruner han podido escribir, incluso ella añade mucho a lo que Newell y Simon han podido pensar en la época de las primeras investigaciones sobre la simulación del pensamiento. La actividad, no es solamente acción, sino también la identificación de los objetivos y sub-objetivos, así como de las tomas de información y controles, que se engendran durante el desarrollo de la actividad. Es extraño que la toma de información haya sido tan mal teorizada, puesto que es uno de los puntos esenciales de las actividades complejas: en la conducción de vehículos y máquinas, en la lectura, etc.. Como son necesarias categorías para recoger la información, y seleccionar lo que es pertinente, los conceptos-en-acto están en el corazón de la organización de los esquemas; y los teoremas-en-acto son el medio de inferir, la mayor parte del tiempo de manera totalmente implícita, los objetivos y reglas oportunas. Es necesario, pues, posibilidades de inferencia inmediatamente: ellas permiten la adaptación de la actividad a la situación presente. No hay en el fondo actividad totalmente automática, que funcione sin control y sin adaptación a las propiedades particulares de la situación; excepto, puede ser, para segmentos muy pequeños de la actividad. La idea de "conducta acordonada" es, con el behaviorismo, una de las peores salidas de la psicología cognitiva de una cierta época.

La formulación de mi teoría está marcada por el hecho de que ha nacido en el dominio de las competencias matemáticas, y a veces, me han reprochado la expresión "*teorema-en-acto*". También pienso, que es útil precisar que un teorema-en-acto, es simplemente una "*proposición tenida por cierta sobre lo real*".

En relación con la cuarta definición, yo no sé darle hoy un contenido concreto; sin embargo, la conservo porque expresa bien la idea que se trata de una función compleja, y que es susceptible de mantener investigaciones en el futuro sobre la simulación de la actividad en situación, por la robótica, por ejemplo.

Ejemplos de filiaciones y rupturas

La teoría de los campos conceptuales concierne al desarrollo del conocimiento. He elegido para mostraros algunos ejemplos de filiaciones y rupturas.

Consideremos los tres problemas siguientes, que se resuelven los tres por la misma operación numérica: 7 + 5 ó 5 + 7.

Pierre tenia 7 canicas. Él gana 5. ¿Cuántas tiene ahora?

Robert acaba de perder 5 canicas. El tiene ahora 7. ¿Cuántas tenía antes de jugar?

Thierry acaba de jugar dos partidas de canicas. El no se acuerda de lo que ha pasado en la primera partida. En la segunda partida, él ha perdido 7 canicas. Haciendo sus cuentas, advierte que, en total, ha ganado5 canicas. ¿Qué ha pasado en la primera partida?

Los dos esquemas que se muestran a continuación (Figs..3 y 4), permiten comprender bien la diferencia entre los dos primeros problemas, Pierre y Robert.

Fig.3. Problema Pierre

El problema Pierre corresponde a uno de los dos casos prototípicos de la adición. Se conoce el estado inicial y la transformación, y se busca el estado final. El otro caso prototípico es la reunión de dos partes en un todo.

El problema Robert, no es prototípico: no se conoce el estado inicial y, para calcularlo, es necesario aplicar al estado final la transformación inversa de la transformación directa.

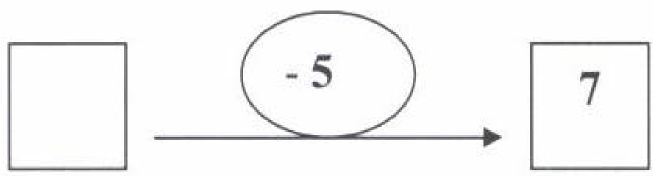


Fig.4. Problema Robert

El problema “Pierre” es resuelto por la casi totalidad de los niños al final del primer año de la escuela elemental, mientras que el problema “Robert”, no es acertado, en general, más que un año y medio más tarde en promedio. El razonamiento canónico identifica entonces, un teorema-en-acto que no era necesario para el problema “Pierre”.

Si F = T (I) entonces I = T^{1} (F)

La distinción entre concepto-en-acto y teorema-en-acto es muy importante, ya que los conceptos son los mismos en el problema “Pierre” y en el problema”Robert”: estado y transformación, estado inicial y estado final. Es un teorema-en-acto el que hace la diferencia. Como la relación entre conceptos y teoremas es dialéctica (no hay teoremas sin conceptos, y no hay conceptos sin teoremas), es grande la tentación de no distinguirles, como es el caso en la teoría de las redes semánticas, y en ciertos ejemplos de mapas conceptuales.

El éxito retrasado entre el problema “Pierre” y el problema “Robert”, representa una pequeña ruptura. Con el problema Thierry (ver Fig.5), se tiene que hacer una gran ruptura ya que no es acertado más que por una muy pequeña minoría de alumnos al final de la escuela primaria y al principio de la escuela secundaria. La elección de la adición, es contra-intuitiva para la casi totalidad de los alumnos, e incluso para muchos de los adultos.

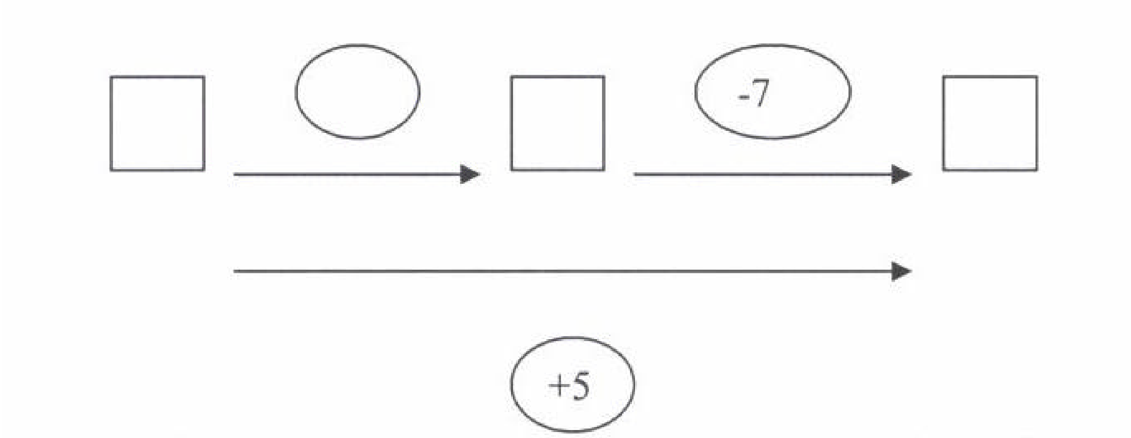


Fig.5. Problema Thierry

En este caso se tiene que hacer la composición de dos transformaciones, y es necesario descomponer +5, en dos transformaciones de signos contrarios, la desconocida y – 7.

Las personas interrogadas aluden entonces a la dificultad del enunciado, y también al hecho de que no se conoce el estado inicial. Yo voy a mostrar que el mismo enunciado es comprendido fácilmente cuando los valores numéricos utilizados permiten evitar el problema de la descombinación de una transformación en dos transformaciones de signos contarios.

Tomemos los cuatro casos siguientes:

A. Ganó 7 ganó 15
Thierry acaba de jugar dos partidas de canicas. No se acuerda de lo que ha pasado en la primera partida. En la segunda él ha ***ganado 7 canicas.*** *Haciendo cuentas, percibe que, en total, ha* ***ganado 15 canicas****. ¿Qué le pasó en la primera partida?*

B. Perdió 7 perdió 15
Thierry acaba de jugar dos partidas de canicas. El no se acuerda de lo que ha pasado en la primera partida. En la segunda partida él ***perdió 7 canicas****. Haciendo sus cuentas, él se da cuenta que, en total, él* ***perdió 15 canicas****. ¿Qué ha pasado en la primera partida?*

C. Ganó 15 ganó 7
Thierry acaba de jugar dos partidas de canicas. Él no se acuerda de lo que ha pasado en la primera partida. En la segunda partida el ***ganó 15 canicas****. Haciendo sus cuentas, se percibe que, en total,* ***ha ganado 7 canicas****. ¿Qué ha pasado en la primera partida?*

D. Perdió 7 ganó 15
Thierry acaba de jugar dos partidas de canicas. No se acuerda de lo que pasó en la primera partida. En las segunda el ***perdió 7 canicas****. Haciendo sus cuentas, el se da cuenta que, en total,* ***ganó 15 canicas****. ¿Qué pasó en la primera partida?*

Al final de la escuela elemental, los dos problemas A y B, son resueltos sin gran dificultad: por alteración de sentido, los alumnos los interpretan como problemas parte/parte/todo: el todo y la parte son del mismo signo, el todo es más grande que la parte. Los alumnos lo relacionan así con un caso más elemental.

El problema C, es un poco más delicado, porque el todo es más pequeño que la parte. Pero los alumnos operan, otra alteración de sentido: saber que "ganó 15 bolas" es considerado como un estado inicial y "ganó 7 bolas" como un estado final. No es demasiado difícil, entonces, investigar la transformación negativa que hace pasar del estado inicial al estado final, por diferencia entre 15 y 7.

Por el contrario, el problema D, no permite alteración de sentidos análogos. Es necesario, pues, conceptualizaciones suplementarias: ya sea una relación en el conjunto de números relativos, o un razonamiento sobre hipótesis, implícitas o explícitas, permitiendo representar lo que ha tenido que ganar, en la primera partida, a la vez las canicas ganadas en total y las perdidas en la segunda partida.

Así la elección de los valores numéricos transforma un problema relativamente trivial en un problema difícil.

El campo conceptual de las estructuras aditivas

Es razonando sobre un gran número de casos, que se puede comprender el campo conceptual de las estructuras aditivas. Yo lo presento como un conjunto de seis relaciones básicas que pueden rehusarse en un gran número de problemas-tipo, los cuales demandan invariantes operatorios diferentes, sobre los que no tengo tiempo de explicarme aquí. A estas relaciones corresponde un conjunto de conceptos, donde muchos quedan ignorados por los profesores, incluso por los matemáticos. El peso del numérico es tal, en matemáticas, que no se puede tomar la medida de los cálculos relacionales necesarios para elegir las operaciones numéricas y los datos pertinentes, incluso porque estos cálculos queden, con frecuencia, totalmente implícitos. Por tanto, será un error reducir el aprendizaje de la aritmética a las cuatro operaciones y al concepto de número.

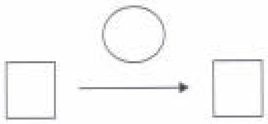
La Tabla 1, de la página siguiente resume las relaciones que, por combinación, permiten engendrar la totalidad de los problemas de adición y de sustracción.

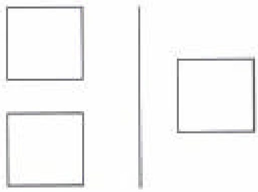
En el conjunto de las clases de problemas, se puede identificar las filiaciones "favorables", aquellas que permite a los alumnos apoyarse sobre los conocimientos anteriores y progresar un poco en la complejidad (se está entonces en la zona de desarrollo proximal, más accesible), y aquellas que son "rupturas", y que apelan a la desestabilización de los alumnos: estamos entonces en una zona de desarrollo proximal menos accesible, para la cual el trabajo de mediación del profesor es más importante y más complejo.

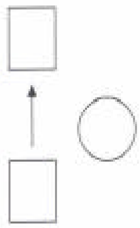
Tabla 1. SEIS RELACIONES ADITIVAS

parte/parte/todo

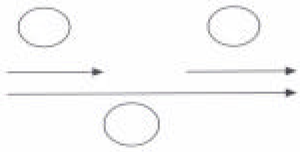
estado/transformación/estado **comparación**

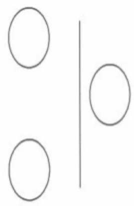




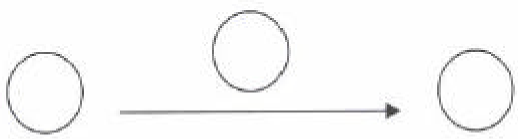


composición de transformaciones **composición de relaciones**





transformación de una relación



Conceptos organizadores de las estructuras aditivas

Cantidades discretas y continuas, medida,
parte-todo,
estado-transformación,
comparación referida- referente
composición binaria (de medidas, de transformaciones, de relaciones)
operación unitaria y función
inversión
número natural-número relativo
posición-abcisa-valor algebraico

Se sabe que hasta la mitad del siglo XIX, el número negativo no había sido aceptado como número verdadero por una parte de los matemáticos, sino solamente como un número cómodo de cálculo algebraico. Las resistencias de los alumnos respecto a los cálculos de números negativos y respecto a soluciones negativas, no son sorprendentes: se explican principalmente por el hecho de que el número es antes ~~que~~ una medida, que las medidas son positivas, y que no se introduce bastante rápido los razonamientos sobre las relaciones y las transformaciones que pueden ser, efectivamente, positivas o negativas.

Las relaciones de Chasles (ver Fig.6), son otro ejemplo de relaciones aditivas, que permiten mostrar el contraste entre un caso de figura relativamente intuitivo y un caso contra-intuitivo.

RELACIONES DE CHASLES

$\overline{AB} = \text{abs (B)} - \text{abs (A)}$ $\qquad$ $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

Ejemplo trivial

Ejemplo contra- intuitivo

Fig.6. Relaciones de Chasles

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas

Conceptos suplementarios son evidentemente indispensables para comprender la dificultad relativa de las clases de problemas susceptibles de ser encontrados, y los razonamientos correctos o errados susceptibles de ser hechos por los alumnos. Yo no tengo los medios aquí de hacer un análisis. He aquí simplemente una relación de posibles conceptos suplementarios indispensables:

Magnitud, escalar, relación y proporción.
función y variable, función lineal, bilineal, n-lineal.
coeficiente constante.
número racional.
análisis dimensional.
espacio vectorial; combinación lineal.
dependencia, independencia.

Yo me contentaré con señalar el rol esencial de los conceptos de función y de variable, especialmente los de función lineal, bilineal y n-lineal.

Para estos conceptos, las representaciones simbólicas (cuadros, gráficas y fórmulas algebraicas) son una ayuda preciosa, y se ve bien entonces que la formulación de las relaciones y sus representaciones enriquecen la conceptualización. Incluso si el concepto, no es solamente "la significación de las palabras", como Vygotsky ha tenido tendencia a afirmar en toda una parte de su obra "Pensamiento y lenguaje", es verdad que la enunciación, la puesta en palabras, la puesta en símbolos gráficos, juega un rol importante, incluso decisivo en los procesos de conceptualización.

Los físicos lo saben bien, ya que dedican mucho esfuerzo a la elaboración de fórmulas. Pero las formulas no son el punto final de la conceptualización, pues es necesario hacer una lectura adecuada, y esto también demanda operaciones de pensamiento.

Tomemos el ejemplo de la fórmula del volumen del prisma recto:

$$\mathbf{V = S\ h}$$

Se puede usar esta fórmula para calcular el volumen del prisma, conociendo el área de la base S y la altura. Es la utilización directa.

Podemos también utilizarla para calcular la altura, conociendo el volumen y el área de la base, o aún, el área de la base conociendo el volumen y la altura. Es la utilización inversa, lo que es ya un poco más difícil para los alumnos.

Pero se puede leer también en la fórmula que el volumen es proporcional al área de la base, cuando la altura es constante, y a la altura cuando el área de la base se considera constante. Es esta la razón fundamental de la fórmula ya que expresa una función de dos variables independientes. Sin embargo, esta lectura no se presenta en los manuales franceses (salvo alguna excepción)

Podemos finalmente servirnos de la fórmula para comprender las relaciones entre unidades y los cambios de unidades: factor 10 sobre las longitudes, factor 10^2 sobre las áreas, factor 10^3 sobre los volúmenes. Se sabe que es muy difícil para los alumnos.

Los problemas de conceptualización no están, pues, totalmente regulados por las fórmulas.

Entre los actos de mediación de los profesores figuran, bien entendido, los acompañamientos por el lenguaje de las actividades de los alumnos en el desarrollo de su actividad, y por tanto, en el proceso de elaboración de sus esquemas (objetivos, sub-objetivos, anticipaciones, selección de la información y formulación de ciertas relaciones, orientaciones de las reglas de acción y de control, inferencias, etc). Pero no podemos olvidar que la elección de las situaciones es el primer acto de mediación del profesor, y que las fórmulas, que resumen los saberes de la disciplina, y que es pues, necesario retener, relevan de la cultura aportada y negociada por el profesor. Excepto rarísima excepción, una fórmula no puede ser descubierta por los alumnos.

Un último esquema, me va a permitir considerar las relaciones entre los invariantes operatorios y los conceptos, teoremas y principios que constituyen los textos científicos.

La conceptualización puede ser definida como la identificación de los objetos del mundo, de sus propiedades, relaciones y transformaciones; esta identificación puede que sea directa o cuasi-directa, o que resulte de una construcción. El constructivismo no concierne solo al desarrollo de los individuos, sino también al de la cultura, especialmente de la cultura científica. La ciencia no puede ser reducida a la lectura de las regularidades del universo; por el contrario, las construcciones de los sabios suponen tomas de conciencia excepcionales, diálogos y confrontaciones con los otros miembros de la comunidad, elaboraciones imaginarias, frecuentemente, personales, que no son compartidas inmediatamente por la comunidad, incluso si esas elaboraciones se apoyan sobre las de otros.

De los invariantes operatorios a los saberes formalizados

Invariantes operatorios agrama de la Fig.7, pone en evidencia el hecho de que los conocimientos , no forman más que una parte de los conocimientos explícitos en la actividad, los cuales no son más que un sub-conjunto de los conocimientos expl Saberes formalizados , en efecto, que es necesario a veces una for Explícitos Explicitables adas las relaciones de los objetos entre ello raciones del sujeto, es una de las funciones del "debriefin Conscientes en psicología del trabajo y en didáctica profesional.

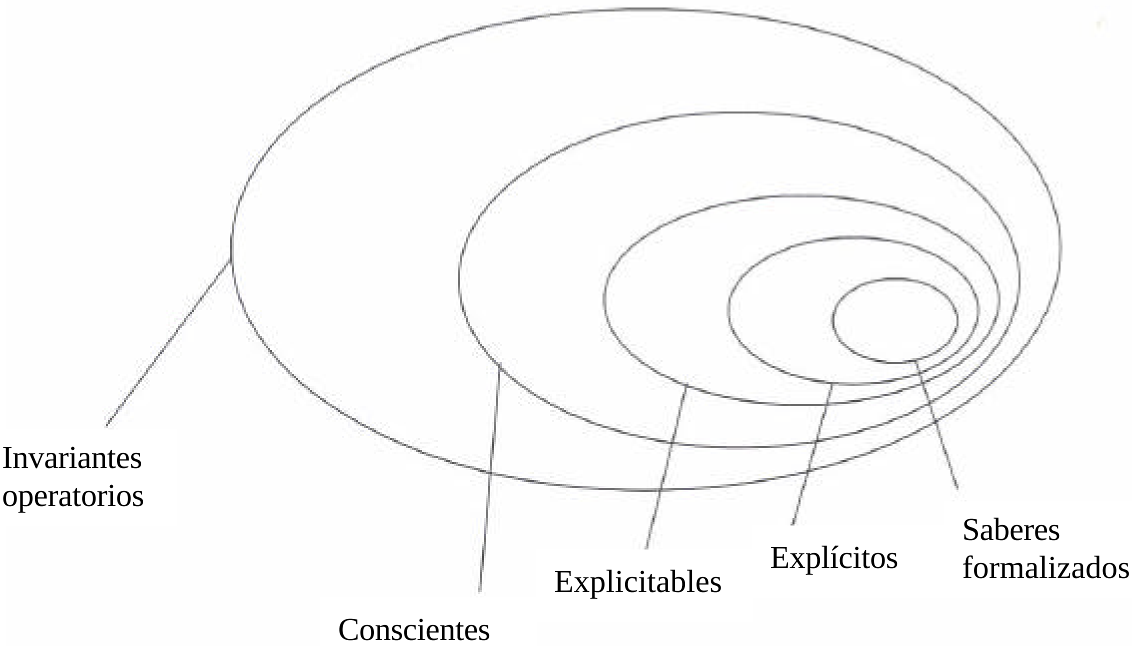


Fig.7. Diagrama invariantes operatorios, conocimiento consciente explicitable, explícito y formalizado.

Pero es la observación de la actividad en situación lo que permite detectar los conceptos-en-acto y los teoremas-en-acto; son eventualmente conscientes para el sujeto, eventualmente inconscientes. Es eso lo que justifica el concepto de invariante operatorio, incluso si los conceptos y teoremas formalizados también son operatorios.

La explicitación no agota la consciencia, y la consciencia misma no agota la conceptualización operada por los invariante soperatorios.

Bibliografía seleccionada (sobre todo en Español, Inglés, Portugués)

Libros

VERGNAUD G.(Ed) (1991). *Les sciences cognitives en débat*. Première école d'été du CNRS sur les sciences cognitives. Paris, Editions du CNRS.

VERGNAUD G. (1991). *El Niño las Matemáticas y la Realidad*. Mexico, Trillas.

LAUTREY J., VERGNAUD G. (Eds) (1997). *Piaget aujourd'hui*. Psychologie Française, 42-1

VERGNAUD G.(2004). *Lev Vygotski, Pedagogo e Pensador do Nosso Tempo*. Porto Alegre ; GEEMPA.

Capítulos de libros

VERGNAUD G., HALBWACHS, F., ROUCHIER, A. (1981). Estructura de la materia enseñada, historia de las ciencias, y desarrollo conceptual del alumno. in Coll, C (Ed.), *Psicologia genetica y education*, Oikos-tau-Barcelona, pp.115-128.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, in Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (Eds). *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*, Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum, 39-59.

VERGNAUD, G. (1983). Actividad y conocimiento operatorie. In Coll, C. (Ed.) *Psicología genética y aprendizajes escolares*, Madrid, Siglo XXI de España Editores, pp. 91-104.

VERGNAUD G., DURAND C. (1983). Estructuras aditivas y complejidad psicogenetica. In Coll, C. (Ed.). *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid, Siglo XXI de España Editores, pp. 105-128.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative structures. In Lesh R., Landau M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press, pp. 127-174.

VERGNAUD, G. (1986). A tentative conclusion. In Janvier C. (Ed.). *Problems of representation in teaching and learning mathematics*. Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 227-232.

VERGNAUD G. et al. (l990) Epistemology and psychology of mathematics education. In Kilpatrick, J. & Nesher, P. (Eds). *Mathematics and cognition*. Cambridge, Cambridge University Press, pp 2-17.

WEIL BARAIS, A., VERGNAUD G.(1990) Students'conceptions in physics and mathematics biases and helps. In Caverni, J.P., Fabre, J-M., Gonzalez, M. (Eds). *Cognitive biases*. North Holland, Elsevier Science Publishers, pp 69-84.

VERGNAUD, G. (1994) Multiplicative Conceptual Field. What and Why. in G. Harel and J. Confrey (Eds). *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of Mathematics*. Albany State, University of New York Press.

VERGNAUD, G. (1996) The theory of conceptual fields. in Steffe, L.P., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G.A., Greer, B. (Eds) *Theories of Mathematical Learning*. Mahwah, Lawrence Erlbaum Ass..

VERGNAUD, G. (1996) Au fond de l'action, la conceptualisation. In Barbier, J-M. (Ed). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris, Presses Universitaires de France.

VERGNAUD, G. (1997) The nature of mathematical concepts in T. Nunes, P. Bryant (Eds) *Learning and Teaching Mathematics; An International Perspective.* Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd.

VERGNAUD, G. (1998) Towards a cognitive theory of practice. In A. Sierpinska, J. Kilpatrick (Eds) *Mathematics Education as a research domain : A Search for Identity.* Kluwer Academic Publishers.

Artículos de Revistas

VERGNAUD, G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 10, pp. 263-274.

VERGNAUD, G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics*, 3, 2, pp. 31-41.

VERGNAUD, G. (1983). Psychology and didactics of Mathematics in France: an overview. *Zentralblatt fur Didaktick der Mathematik*, 2, pp. 59-63.

VERGNAUD, G., RICCO, G. (1986). Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y Métodos. *Revista Argentina de Educación*, 4, pp. 67-92.

VERGNAUD, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. In *Análise Psicológica*, 1 (V): pp. 75-90.

VERGNAUD, G. (1996) Some of Piaget's fundamental ideas concerning didactics, *Prospects*, 26-1, 183-194.

VERGNAUD, G. (1996) Education the best portion of Piaget's heritage. Swiss *Journal of Psychology*, 55-2/3, 112-118.

VERGNAUD, G. (1999) A comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior* (Numéro spécial sur la représentation), 17, 2, 167-181.

VERGNAUD, G., RECOPE, M. (2000) De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui. *Psychologie Française* (La Société Française de Psychologie a cent ans), 45, 1, 35-50.

Comunicaciones

VERGNAUD, G. (1987). About constructivism. *Proceedings of the twelvth Conférence for the Psychology of Mathematics Education*, Montréal, pp. 42-54. (invited plenary address).

VERGNAUD, G. (1988) Theoretical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. Plenary address. In A. Hirst & K. Hirst (Eds.) *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education*, Budapest, Janos Bolyai Mathematical Society, Conférence plénière, pp 29-47.

CORTES, A., VERGNAUD, G., KAVAFIAN, N. (l990) From Arithmetic to Algebra : negociating a jump in the learning process. *Proceedings of the l4th PME Conference*, 2, pp 27-34.

VERGNAUD, G. (1988) Psicología cognitiva y del desarrollo y didácticas de las matemáticas. In F. Huarte *Temas actuales sobre psicopedagogía y didáctica. 2e Congreso Mundial Vasco.*

VERGNAUD, G. (1989). Problem-solving and concept-formation in the learning of mathematics. In H. Mandl, E. De Corte, H. Bennett, H. Friedrich (eds.) *Learning and Instruction*, Oxford Pergamon Press, Conférence plénière, 399-413.

VERGNAUD, G. (1995) Teoria dos campos conceituais. In L. Nasser. *Anais do 1° Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.* Rio, juillet 1993, pp.1-26.

VERGNAUD, G. (1995) In what sense is research on mathematics education useful to teachers. *Proceedings of the Second Pan Hellenic Congress on Mathematics Education*, Cyprus, avril 1995, pp.21-39.

VERGNAUD G. (1996) Important cognitive changes in the learning of mathematics. A developmental perspective. In *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (Sevilla, 14/21 juillet 1996). SAEM Thales, p 412.

VERGNAUD G. (1997) Algebra, Additive and Multiplicative Structures. Is there any coherence at the early secondary level? *In ERCME (European Research Conference on Mathematical Education)* . Podebrady, pp 33-45.