

**CONFLITO ENTRE ESCOLAS DE PENSAMENTO DA MATEMÁTICA:
EXPLORAÇÃO DE POTENCIALIDADES PARA A MELHORIA DOS ENSINOS DA
MATEMÁTICA E DA FÍSICA**
(Conflict among school of thought in mathematics: exploring potentialities to improve the
teaching of mathematics and physics)

Bernardo Leopardi Gonçalves B.Bastos [leopardi1@hotmail.com]

Centro de Tecnologia – CTEC - Universidade Federal de Alagoas

CEP. 57072-970, Maceió-Alagoas-Brasil

Jenner Barretto Bastos Filho [jenner@fis.ufal.br]

Departamento de Física da Universidade Federal de Alagoas

Campus da Cidade Universitária, CEP 57072-970, Maceió-Alagoas-Brasil

Resumo

Neste trabalho exploramos alguns aspectos das concepções surgidas durante a primeira metade do século XX sobre os fundamentos da matemática. Tratamos do conflito entre quatro escolas de pensamento rivais (a *logicista*, a *intuicionista*, a *formalista* e a *conjuntista*) no que se refere às potencialidades capazes de prover uma melhoria dos ensinoss da matemática e da física principalmente nos níveis médio e superior. São tentadas também algumas conexões com a situação do *ensino da mecânica quântica* e com o conceito de *aprendizagem significativa*. São discutidos traços da riqueza conceitual do termo *intuição*.

Palavras-chave: escolas de pensamento da matemática, ensino de matemática, ensino de física

Abstract

We explore some aspects of the rival conceptions on the foundations of mathematics appeared during the first half of the twentieth century. We consider the conceptions respectively adopted by the four following schools of thought: the *logicist* school, the *intuicionist* school, the *formalist* school and the school based on the *set theory foundations*. We argue in favor of the great potentialities that this debate can give rise to the improvement of mathematics and physics teachings. We search connections with the *quantum mechanics teaching* and with the concept of *meaningful learning*. Some aspects of the great plurality of meanings of the term *intuition* are discussed.

Key-words: schools of thought of mathematics, mathematics teaching, physics teaching.

Introdução

O nosso objetivo central neste trabalho é a exploração de alguns traços das concepções das quatro escolas de pensamento rivais da matemática da primeira metade do século XX tendo em vista o que o seu estudo atento e judicioso pode nos instruir para eventuais melhoramentos dos ensinoss de matemática e de física principalmente no que concerne aos ensinoss médio e superior.

Procedemos a uma breve resenha de alguns aspectos característicos das escolas, respectivamente, *logicista*, *intuicionista*, *formalista*, e *conjuntista*, procurando, de alguma maneira, mostrar que os termos básicos que as denotam (*lógica*, *intuição*, *fórmula*, e *conjunto*)

sugerem primazias acerca do que cada uma dessas escolas concebe sobre a natureza da matemática e de sua eventual ou não conexão com a realidade. Aparecem questões como: *Os princípios lógicos requereriam as intuições corretas?* ou ao invés, *As intuições corretas regeriam os princípios lógicos?* ou ainda, *Tratar-se-ia então de um diálogo complexo entre lógica e intuição o qual é mediado pelo mundo exterior?*

Questões outras que naturalmente surgem são: *É rigorosamente possível se conceber um jogo de símbolos sem significado com que se joga com regras acordadas de antemão? Os princípios lógicos clássicos seriam inevitáveis? Porque os conjuntos constituiriam um conceito sólido para se construir a matemática?*

No presente trabalho exploramos também as possíveis conexões deste debate com as idéias propagadas no contexto da escola dominante de interpretação da mecânica quântica no bojo das quais exagera-se, com conseqüências, ao nosso ver, pouco alvissareiras para o ensino de física, ao se fazer apologia da categoria da *incompreensibilidade* da realidade microfísica.

Exploramos ainda conexões com o conceito de *aprendizagem significativa* e a intensa polissemia do termo *intuição*.

Lamentamos que lições porventura advindas deste debate sejam pouquíssimo exploradas devido à quase total ausência dessas discussões nos cursos de matemática e de física em vários níveis de escolaridade.

O nosso trabalho está assim organizado: a próxima seção constitui uma justificativa mais abrangente acerca das *potencialidades* do presente estudo no que diz respeito a eventuais melhorias dos ensinamentos de matemática e física através da discussão do tema por ocasião dos cursos dessas disciplinas; as quatro seções imediatamente seguintes são dedicadas, respectivamente, a cada uma das escolas de pensamento analisadas; a seção imediatamente sucessiva procede a uma breve síntese que levanta algumas questões suscitadas pelo conflito entre as Escolas de Pensamento em tela e, além disso, retoma e amplia aquelas que foram levantadas na seção da justificativa mais abrangente da proposta do trabalho; na penúltima seção ampliamos a discussão conectando com a situação no *ensino de mecânica quântica* e com o conceito de *aprendizagem significativa*; finalmente, na última seção sintetizaremos os nossos resultados.

Justificativa mais abrangente da proposta

O entrelaçamento entre os campos do Ensino de Ciências, das Teorias da Aprendizagem e da Linguagem e da História e Filosofia das Ciências tem se intensificado nos últimos tempos. Como uma evidência marcante desta tendência, podemos citar o crescente interesse, no nosso país, por publicações que incentivam o desenvolvimento deste entrelaçamento entre as quais *Investigações em Ensino de Ciências*, o *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* (antigo *Caderno Catarinense de Ensino de Física*) e a *Revista Brasileira de Ensino de Física* da SBF.

Como mais um elemento que corrobora o que foi dito acima, constatamos que diversos congressos nacionais e internacionais vêm atuando como incentivadores desta prática interdisciplinar que reúne pessoas de diferentes vocações e formações culturais o que é altamente recomendável, pois potencializa sobremaneira o pensamento. Mesmo no seio dos

próprios congressos monodisciplinares vem se observando, claramente, uma tendência na direção de algum tipo de atividade interdisciplinar.

Concebemos que essas trocas sejam tão importantes para o desejável exercício do pensamento quanto o pluralismo assim o é para o bom exercício da democracia. Outrossim, podemos asseverar que a educação e a ciência carecem tanto desta prática quanto a saúde dos ecossistemas carece da diversidade biológica e a cultura planetária carece do respeito pela diversidade cultural amplamente acordada por critérios de tolerância, critérios esses que não impliquem em tolerância com a intolerância e por conseguinte, não impliquem em tolerância com os perversos fundamentalismos que transformam simples adversários em ferozes inimigos.

Há, em amplos círculos de opinião, o reconhecimento crescente de que o tratamento dos complexos problemas suscitados pelo Ensino de Ciências não se reduz meramente ao âmbito restrito das Ciências específicas. Em que pese o fato do concurso dessas ciências ser imprescindível, na medida em que é no desenvolvimento dessas que são suscitados os próprios conteúdos que são trabalhados nos cursos, devemos enfatizar, contudo, que esse concurso, embora necessário, é claramente insuficiente.

Um Ensino de Ciências, que deseje ser conseqüente, deve, além das fontes próprias das ciências específicas, estar permanentemente aberto para prover meios que potencializem a incorporação de estudos das Teorias da Aprendizagem e da Linguagem e da História e Filosofia das Ciências.

E é no contexto de um maior entrelaçamento desses campos supracitados, os quais já constituem tradições consideráveis, é que o presente trabalho pretende se situar.

O nosso trabalho, na medida em que trata do debate entre Escolas de Pensamento, cada umas das quais elegendo categorias conceituais diferentes das demais a fim de que as características precípuas da matemática sejam explicadas, suscita necessariamente temas epistemológicos, pois a própria natureza do conhecimento matemático passa a se constituir em um dos focos centrais da discussão.

Que a conexão desses temas epistemológicos com o Ensino de Ciências seja absolutamente clara é perfeitamente justificada pela necessidade de que o aprendiz tem de debater a natureza do conhecimento da disciplina que está aprendendo, inclusive quanto à sua relação com a realidade. Além disso, se não viermos a estabelecer uma conexão implícita ou explícita que implique no debate sobre a natureza do que se deseja aprender, o objetivo de alcançar uma *aprendizagem significativa* ficaria prejudicado. Expliquemos melhor.

Não supomos como imprescindível que uma discussão epistemológica explícita tenha que dominar os conteúdos específicos dos cursos. É muito mais aconselhável, segundo a nossa opinião, que temas epistemológicos apareçam no contexto dos próprios conteúdos específicos a partir da discussão sobre a significação dos entes e categorias utilizados ao longo dos cursos. Asseveramos que a divergência entre grandes pensadores acerca das categorias que fundam a própria disciplina matemática constitui excelente oportunidade para prover conflitos cognitivos (e, portanto epistemológicos) que ajudam sobremaneira a *aprendizagem significativa*.

E é precisamente neste contexto que gostaríamos de justificar o caráter *potencial* que nós, enquanto autores, atribuímos ao presente trabalho. Em outras palavras, asseveramos que o

mesmo tem *possibilidades* de prover ricas discussões na direção de efetivas melhorias dos ensinamentos de matemática e de física. Vejamos como.

Ora, se termos como *Lógica, Intuição, Fórmula e Conjunto*, que constituem o cerne de nossa discussão, suscitam diversas dúvidas em virtude de suas possíveis acepções e significados subjacentes, então isso, por si só, implica em grandes *potencialidades* pedagógicas.

Vejamos, por exemplo, o termo *Lógica*. Efetivamente ao longo do presente trabalho vamos nos referir, entre outros, ao pensamento de Russell e Whitehead no período de 1910-1913. Ora, eles se ativeram à *Lógica Clássica*. No entanto, é possível que com o advento das assim chamadas *Lógicas Não-Clássicas* (ver a propósito os ensaios de Newton da Costa, 1980 e 1997) sejam necessários alguns retoques. Uma discussão sobre a eventualidade ou não de tais retoques, por exemplo, pode ser implementada em sala de aula a partir da inspiração que o presente estudo sobre o conflito entre Escolas de Pensamento da Matemática possa prover. Este é um exemplo concreto de uma das *potencialidades* que um estudo deste gênero pode propiciar. Mas, sustentamos que, as *potencialidades* são várias e de diferentes teores.

Com o fito de consubstanciar os nossos argumentos em prol das *potencialidades* do presente estudo no sentido de prover eventuais melhorias dos ensinamentos de matemática e física, asseveramos que mais duas importantes questões podem ser implementadas em sala de aula sob a orientação de um professor. Essas questões podem, com enorme proveito, ser perfeitamente inspiradas no contexto da discussão crítica entre as quatro Escolas de Pensamento que traremos à baila adiante

A primeira de tais questões é a seguinte:

-Em que medida essa discussão sobre as Escolas de Pensamento da Matemática nos ajuda a dirimir a dúvida acerca da natureza da matemática, ou seja, se a matemática é descoberta ou inventada, ou ainda se ela é parcialmente descoberta e inventada?

A segunda de tais questões é a seguinte:

- De que maneira essa discussão sobre as Escolas de Pensamento da Matemática nos ajuda a dar uma resposta sobre a extraordinária eficácia da matemática para cobrir a realidade e, em especial, para cobrir a realidade física?

Na seção intitulada *O que é enfim a Matemática? Qual a sua Natureza?* mostraremos que essas *potencialidades* e *propensões* realmente existem e para tal conectaremos o teor discutido com o importante e recorrente problema do *inatismo* versus *construtivismo*. Nesse estágio de desenvolvimento de nosso trabalho, e inspirados pelos problemas por ele suscitados, defenderemos a tese da necessidade de uma maior articulação do *Ensino de Ciências*, com as *Teorias da Aprendizagem e da Linguagem*, e com a *História e a Filosofia das Ciências*.

No que diz respeito ao ensino de mecânica quântica, cuja escola de pensamento dominante assevera que os objetos de que trata a teoria não são passíveis de compreensão por meio de categorias clássicas que sejam, a um só tempo, *espaço-temporais e causais*, podemos dizer que os campos de pesquisa aludidos acima se entrelaçam de maneira bastante emaranhada. Ora, categorias conceituais como *compreensibilidade, significação, formalismo, intuição e lógica* estão na ordem do dia da discussão e no âmago do problema tanto no que concerne *stricto sensu* à física quântica quanto no que concerne à educação científica.

Embora o nosso estudo se constitua num corte transversal desses campos enormemente complexos, esperamos ter respondido, pelo menos parcialmente, a um dos árbitros do presente trabalho, que, não obstante, e muito competentemente, lançou algumas dúvidas tanto sobre essas eventuais *potencialidades* quanto sobre a eventual expectativa que o título poderia suscitar, o que, segundo o seu parecer, poderia levar o leitor a se decepcionar quando procurasse onde estariam tais eventuais *potencialidades*. Enfim, diríamos que essas interseções interdisciplinares são de tal maneira belas e complexas que a última coisa que gostaríamos é que o leitor viesse a se decepcionar. Outrossim, gostaríamos de afirmar que embora o nosso estudo tenha um caráter teórico, ele, em contrapartida, oferece muitas *potencialidades* pelo enorme leque de questões suscitadas para que venha a ser aproveitado em eventuais estudos empíricos sobre o assunto inclusive, a própria implementação da discussão deste artigo em sala de aula quanto às suas interseções interdisciplinares suscitadas.

Escola logicista

O cerne do programa de pesquisa da escola *logicista* é, *grosso modo*, centrado na concepção que assevera a redução de toda a matemática à lógica¹. O filósofo e matemático inglês Bertrand Russell (1872-1970) foi um dos expoentes deste programa. Os seus famosos *Principia Mathematica* publicados em 3 volumes entre os anos de 1910 a 1913 e escritos em colaboração com o matemático e filósofo Alfred North Whitehead (1861-1947) constituem uma monumental obra nessa direção.

Antes de tecermos considerações sobre o século XX reportemo-nos a um marco do que pode ser considerado como a pré-história da escola *logicista*. Trata-se de um grande precursor do programa logicista: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Em sua segunda carta a Clarke, Leibniz escreveu:

O grande fundamento dos matemáticos é o princípio da contradição ou da identidade, isto é, que um enunciado não poderia ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo, e que assim A é A e não poderia ser *não-A*. E esse único princípio basta para demonstrar toda aritmética e toda a geometria, ou seja, todos os princípios matemáticos. (LEIBNIZ, 1988b: 237; 1ª edição: 1717)²

¹ Podemos dizer de maneira panorâmica que a Lógica Aristotélica (ou Lógica Clássica) é uma tal baseada nos seguintes três princípios: 1) o princípio da identidade segundo o qual Δ é Δ ; 2) o princípio da contradição segundo o qual Δ não pode ser simultaneamente e sob o mesmo aspecto B e *não-B*; 3) o princípio do terceiro excluído segundo o qual Δ é ou B ou *não-B* e não há uma terceira alternativa. (Ver, por exemplo, BOYER, 1990, Cap. 27, seção 9, p. 703). Tais princípios foram tidos como intocáveis durante mais de dois milênios. Em 1854 Boole chegou a sugerir, no seu importante livro intitulado *An Investigation of the Laws of Thought*, que os princípios da lógica seriam algo muito próximo das próprias *Leis do Pensamento*. No entanto, como sabemos, o *Pensamento* é algo bem mais complexo e geral do que a *Lógica* e não é redutível a essa última. A assim chamada *Escola Intuicionista* de matemática de Brouwer, por exemplo, não aceitava o princípio do terceiro excluído. O teorema da incompletude de Gödel de 1931 também foi considerado um duro golpe para o princípio do terceiro excluído pois se no contexto de uma base axiomática que contenha a aritmética é possível encontrar proposições em relação às quais não se pode provar nem a sua veracidade nem a sua falsidade, então o princípio perde sustentação na medida em que se configura uma terceira alternativa: a *indecidibilidade*. Hoje em dia há um campo de pesquisa conhecido como *Lógicas Não-Clássicas* que não investe propriamente contra a solidez da Lógica Clássica e sim contra a solidez da sua inevitabilidade e da sua exclusividade. Segundo o parecer dos pesquisadores envolvidos nessas lógicas, há outras lógicas tão legítimas quanto a Lógica Clássica da mesma maneira que as Geometrias Não-Euclidianas são tão legítimas quanto a Geometria Euclidiana. A propósito, ver os interessantes ensaios de Newton da Costa (Da Costa, 1980; Da Costa, 1997).

² A correspondência Leibniz/ Clarke se constitui em um total de 5 cartas de Leibniz e 5 cartas de Clarke. Ela começa com uma carta de Leibniz enquanto 'Excertos de uma missiva a Sua Alteza Real Princesa de Gales, de novembro de

Como podemos constatar da citação acima, Leibniz argumenta que a partir de um princípio basilar da lógica podemos construir toda a matemática. Logo, segundo o seu parecer, a matemática é algo que se constrói a partir da lógica. No entanto, ele não era do parecer segundo o qual a matemática sozinha fosse suficiente para a construção da física. Sem dúvida, ela é necessária, mas não suficiente. Leibniz considerava que para se construir a física faz-se necessário, além da matemática (construída, segundo ele, a partir do princípio lógico da contradição), também de um outro princípio: *o princípio da razão suficiente* que no fundo é um princípio de *causalidade*.

Vejamos o texto de Leibniz que é continuação da citação precedente.

Mas, se desejamos passar da matemática à física, precisamos de um outro princípio ainda, como observei na minha *Teodicéia*, quer dizer, o princípio da razão suficiente: que nada acontece sem que haja uma razão por que isso seja assim antes do que de outro modo. (LEIBNIZ, 1988b: 237; originalmente publicado em 1717)

Tal como é possível interpretar trata-se de uma crítica de Leibniz tanto em relação à redução newtoniana da Física (Filosofia Natural) aos Princípios Matemáticos quanto em relação à redução cartesiana da Física à Geometria.

Mas voltemos à idéia leibniziana de construção da matemática a partir da lógica. É importante, neste contexto, explicitar a distinção leibniziana entre *verdades da razão* ou *verdades necessárias*, por um lado, e *verdades de fato* ou *verdades contingentes*, por outro.

Vejamos uma citação a respeito:

Uma verdade é necessária quando o oposto implica uma contradição; e quando ela não é necessária ela é chamada de contingente. Que Deus exista e que todos os ângulos retos sejam iguais entre si são verdades necessárias; mas o fato de que eu exista é uma verdade contingente como o é o fato de que existam corpos que exibam um ângulo reto real. (LEIBNIZ apud MATES, 1986 : 106)³. [A tradução para o português é nossa]

1715' e termina com uma quinta carta de Clarke. A morte de Leibniz ocorrida no dia 14 de novembro de 1716 o impediu de escrever aquela que seria a sua sexta carta nesta correspondência. A primeira edição inglesa completa data de 1717 e foi preparada pelo próprio Clarke que inclusive se incumbiu de traduzir as cartas de Leibniz. Segundo o que Alexander sustenta no seu prefácio (LEIBNIZ/CLARKE, 1956 ALEXANDER (ORG), a tradução de Clarke das cartas de Leibniz é muito precisa.

³ Traduzimos para o português a partir de uma tradução inglesa (in B. Mates, 1986: 106) que aqui reproduzimos: "A truth is necessary when the opposite implies a contradiction; and when it is not necessary, it is called contingent. That God exists, that all right angles are equal to each other, are necessary truths; but it is a contingent truth that I exist, or that there are bodies which show an actual right angle". OBSERVAÇÃO: Mates remete para a referência G III 400 (R208); cf. G I 194 (L187). A referência G diz respeito a Leibniz, G. W., *Die Philosophischen Schriften*, Ed. C. I. Gerhardt, 7 vols., Berlim, 1857-90; Reimpresso por Hildesheim, 1965. A referência R diz respeito a Russell, B. A. W., *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Ed. Rev. Londres 1937. A referência L diz respeito a Leibniz, G. W., *Philosophical Papers and Letters*, tradução de L. Loemker, 2ª edição, Dordrecht, 1969. A distinção entre verdade necessária e verdade contingente, que é o foco desta citação, também pode ser encontrada nos *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano* de Leibniz, obra escrita entre os anos de 1701 e 1704, mas somente publicada em 1765, ou seja, quase 50 anos após a morte de Leibniz. Reproduzimos aqui essa citação: " Como podeis ver, essas pessoas, muito versadas aliás, que têm outra opinião, parecem não ter meditado suficientemente sobre as conseqüências da diferença existente entre as verdades necessárias ou eternas, e entre as verdades de experiência, como já observei, e como demonstra toda a nossa contestação. A demonstração originária das verdades necessárias vem exclusivamente do

Ora, as *verdades necessárias* valem em nosso mundo e valeriam mesmo em quaisquer outros mundos possíveis; se Deus quisesse conceber um outro mundo de acordo com um outro plano, ainda assim essas verdades seriam necessariamente verdadeiras. No entanto, no que diz respeito às *verdades contingentes* (ou ainda *existenciais*) jamais se poderá demonstrar a sua necessidade lógica. Segundo Leibniz, há proposições que são pertinentes à *essência* enquanto há outras que são pertinentes à *existência de coisas* e esses dois tipos de proposições são diferentes. Aquelas que podem ser demonstradas por *resolução de termos* são verdades necessárias, mas as que não podem ser demonstradas por qualquer resolução não o são. Vejamos uma citação sobre o argumento:

Desde então aprendemos que proposições que sejam pertinentes às essências diferem daquelas que sejam pertinentes à existência de coisas. Certamente essenciais são aquelas que podem ser demonstradas a partir da resolução de termos, isto é, que sejam necessárias, virtualmente idênticas, e a oposta das quais, além disso, seja impossível ou virtualmente contraditória. Essas são verdades eternas. Não somente elas valem neste mundo como valeriam em quaisquer outros mundos que Deus viesse a criar de acordo com um plano diferente. Mas as verdades existenciais ou contingentes diferem dessas inteiramente. Sua verdade é conhecida a priori pela mente infinita apenas, mas ela não pode ser demonstrada por qualquer resolução. (LEIBNIZ apud MATES, 1986 : 107)⁴. [A tradução é nossa].

Leibniz propôs uma Lógica Universal que continha três elementos importantes: uma *characteristica universalis*, um *calculus ratiotinator* e uma *ars combinatoria* (Ver Kline, 1980: 183). Assim chamada *characteristica universalis* constituir-se-ia numa linguagem científica universal por meio da qual todas as verdades fossem dedutíveis por raciocínio. O segundo elemento, o *calculus ratiotinator* diria respeito à coleção de formas lógicas do raciocínio que permitissem operacionalizar todas essas possíveis deduções a partir dos princípios iniciais. A *ars combinatoria* constituir-se-ia num alfabeto de conceitos que tornassem possível a construção, por meio da operação de cálculos, de conceitos cada vez mais elaborados.

Outro autor que poderia ser considerado como um precursor avançado, senão mesmo um pioneiro moderno da escola *logicista*, é o matemático Gottlob Frege (1848-1925). Ele partiu do pressuposto de que as verdades lógicas são *a priori* verdadeiras ou como diria Leibniz, verdades de razão ou verdades necessárias, e assim o seu programa constituía-se em deduzir, a partir de premissas lógicas, os conceitos da aritmética e as definições e leis dos números.

entendimento, ao passo que as demais verdades procedem das experiências ou das observações dos sentidos. O nosso espírito é capaz de conhecer umas e outras, mas é fonte das primeiras; e qualquer que seja o número de experiências que possamos ter de uma verdade universal, não podemos ter certeza dela pela indução, sem conhecer pela razão a sua necessidade." (LEIBNIZ, 1988a, Vol. I : 32; originalmente publicado em 1765).

⁴ Traduzimos para o português a partir de uma tradução inglesa (in B. Mates, 1986: 107) que aqui reproduzimos: "Hence we now learn that propositions which pertain to the essences and those which pertain to the existences of things are different. Essential surely are those which can be demonstrated from the resolution of terms, that is, which are necessary, or virtually identical, and the opposite of which, moreover, is impossible or virtually contradictory. These are the eternal truths. Not only will they hold as long as the world exists, but also they would have held if God had created the world according to a different plan. But existential or contingent truths differ from these entirely. Their truth is grasped a priori by the infinite mind alone, and they cannot be demonstrated by any resolution." OBSERVAÇÃO: Mates remete para a referência C(18) (S&G 348). A referência C diz respeito a Couturat, Louis, ed. *Opusculum et fragments inédits de Leibniz: Extraits des manuscrits de la bibliothèque royale de Hanovre*, Paris, 1903; Reimpressão por Hildesheim, 1961. A referência S&G diz respeito a Smith, T. V. & M. Grene, *From Descartes to Kant: Readings in the Philosophy of the Renaissance and Enlightenment*, Chicago, 1933.

A obra de Frege é muito importante, mas careceu de desenvolvimentos ulteriores em termos do rigor tão caro aos matemáticos. Quando parte de um de seus importantes livros estava já no prelo – o segundo volume de *As Leis Fundamentais da Aritmética* - ele recebeu, em 1902, uma carta de Bertrand Russell na qual apontava que o conceito de *conjunto de todos os conjuntos* pode levar a uma contradição (Ver, Kline, 1980: 217).

Frege⁵ assim se manifestou em relação à carta de Russell:

Difícilmente alguém pode se deparar com algo mais indesejável do que ver os seus fundamentos caírem por terra justamente quando a sua obra está no fim. A carta do Sr. Bertrand Russell me colocou nessa posição no momento em que o trabalho estava na iminência de ir para a publicação. (FREGE apud KLINE, 1980: 217-218). [A trad. é nossa].

Na tradição de autores como Leibniz, Boole, e Frege, o matemático e filósofo Bertrand Russell sozinho e/ ou em colaboração com Whitehead, trabalhou extensivamente no programa logicista. Russell declarou sua dívida intelectual para com o matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Referindo-se ao encontro que ele teve com Peano em um congresso realizado em 1900 em Paris⁶, Russell⁷ conta:

O Congresso representou um ponto de mudança em minha vida intelectual pelo fato de que eu encontrei Peano. Eu já o conhecia de nome e tinha visto alguns de seus trabalhos....Tornou-se claro para mim que sua notação oferecia um instrumento de análise que eu procurava há anos e que ao estudar seus trabalhos eu estava adquirindo uma nova e poderosa técnica para o trabalho que eu queria há muito tempo realizar. (RUSSELL apud KLINE, 1980: 218). [A tradução é de nossa responsabilidade].

⁵ A reação de Frege à carta de Russell que nós utilizamos para a tradução para o português foi tirada de uma tradução inglesa: “A scientist can hardly meet with anything more undesirable than to have the foundation give way just as the work is finished. A letter from Mr. Bertrand Russell put me in this position at the moment the work was nearly through the press.”

⁶ Durante o ano de 1900 dois congressos internacionais foram realizados em Paris. Consultando o sítio eletrônico <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/> é possível constatar que Russell encontrou Peano no *International Congress of Philosophy* realizado em Paris em 1900. Podemos ler no sítio o seguinte texto: “However, perhaps Peano’s greatest triumph came in 1900. In that year there were two congress held in Paris. The first was the *International Congress of Philosophy* which opened in Paris on 1 August. It was a triumph for Peano and Russell, who attended the Congress wrote in his autobiography: (o texto correspondente encontrado na autobiografia de Russell está disposto na próxima nota de rodapé). Após, a citação de Russell podemos ler no sítio mencionado o seguinte texto: “The day after the Philosophy Congress ended the *Second International Congress of Mathematicians* began. Peano remained in Paris for this Congress and listened to Hilbert’s talk setting out ten of the 23 problems which appeared in his paper aimed at giving the agenda for the next century. Peano was particularly interested in the second problem which asked if the axioms of arithmetic could be proved consistent.” [Agradecemos a um dos árbitros pela indicação deste sítio que nos ajudou a dirimir uma dúvida sobre em qual dos dois congressos houvera tido lugar o encontro de Russell com Peano e a qual dos dois congressos Russell se referia em sua autobiografia].

⁷ O texto da citação em inglês é: “The Congress was a turning point in my intellectual life, because there I met Peano. I already knew him by name and had seen some of his work.... It became clear to me that his notation afforded an instrument of analysis such as I had been seeking for years, and that by studying him I was acquiring a new and powerful technique for the work I had long wanted to do.”

Agora vejamos algo sobre o programa russelliano. Uma citação do próprio Russell, tirada de um de seus artigos, é muito expressiva para os nossos propósitos aqui. Russell⁸ escreveu:

A matemática pura foi descoberta por Boole, em um trabalho que ele chamou de *Leis do Pensamento* (1854). Este trabalho está repleto de asserções que não são matemáticas como por exemplo o fato de que Boole foi também modesto para supor que o seu livro fosse o primeiro escrito sobre matemática. Ele também errou ao supor que o livro tratasse das leis do pensamento: a questão de como as pessoas realmente pensam era quase irrelevante para ele, e se o seu livro realmente continha as leis do pensamento, é curioso o fato de que ninguém havia pensado sobre isso antes dele. *De fato, o seu livro era concernente à lógica formal, ou o que é a mesma coisa, era concernente à matemática.* [As ênfases em caracteres itálicos postas na última frase são nossas]. (RUSSELL, 1965: 50). [A tradução é nossa].

Trata-se de uma citação bastante interessante e que pode ser analisada sob diversos aspectos; no entanto, o aspecto que desejamos ressaltar nesta citação está muito mais centrado na última frase na qual é asseverado, com todas as letras, *que lógica e matemática se identificam a ponto de serem, segundo Russell, a mesma coisa.*

Vejamos agora a continuação da citação precedente de Bertrand Russell que é ainda mais interessante para os nossos objetivos aqui. Russell⁹ continua:

A matemática pura consiste inteiramente de asserções resultantes do fato de que, se tal proposição é verdade de *qualquer coisa*, então tal outra proposição é verdade daquela coisa. É essencial não discutir se a primeira proposição é realmente verdadeira e também não mencionar o que é essa *qualquer coisa*, da qual supomos que seja verdade. Ambos esses pontos pertenceriam à matemática aplicada. Nós partimos, em matemática pura, de certas regras de inferência pelas quais nós podemos inferir que *se* uma proposição é verdadeira, então é também verdadeira uma outra proposição. Essas regras de inferência constituem a maior parte dos princípios da lógica formal. Nós então tomamos qualquer hipótese que nos pareça razoável e deduzimos as suas conseqüências. *Se* nossa hipótese é sobre *qualquer coisa*, e não sobre alguma dada coisa ou ainda uma coisa ainda mais particular, então nossa dedução constitui o que seja matemática. *Assim, a*

⁸ Vejamos o texto original em inglês: “Pure mathematics was discovered by Boole, in a work which he called the *Laws of Thought* (1854). This work abounds in asseverations that it is not mathematical, the fact being that Boole was too modest to suppose his book the first ever written on mathematics. He was also mistaken in supposing that he was dealing with the laws of thought: the question how people actually think was quite irrelevant to him, and if his book had really contained the laws of thought, it was curious that no one should ever have thought in such a way before. *His book was in fact concerned with formal logic, and this is the same thing as mathematics.*” [As ênfases em caracteres itálicos postas na última frase são nossas].

⁹ O texto correspondente em inglês é o seguinte: “Pure mathematics consists entirely of assertions to the effect that, if such and such a proposition is true of *anything*, then such and such another proposition is true of that thing. It is essential not to discuss whether the first proposition is really true, and not to mention what the anything is, of which it is supposed to be true. Both these points would belong to applied mathematics. We start, in pure mathematics, from certain rules of inference, by which we can infer that *if* one proposition is true, then so is some other proposition. These rules of inference constitute the major part of the principles of formal logic. We then take any hypothesis that seems amusing, and deduce its consequences. *If* our hypothesis is about *anything*, and not about some one or more particular things, then our deductions constitute mathematics. *Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.*” [As ênfases em caracteres itálicos postas na última frase são nossas].

matemática pode ser definida como o assunto em que nós nunca sabemos sobre o que nós estamos falando, nem se o que estamos dizendo é verdade. [As ênfases em caracteres itálicos postas na última frase são nossas]. (RUSSELL, 1965: 50). [A tradução é nossa].

Faz-se mister ressaltar que essas duas últimas citações de Russell foram tiradas de um livro coletivo publicado em 1965 o qual reproduz o trabalho correspondente que foi originalmente publicado no *International Monthly* de 1901, ou seja, há um pouco mais de um século. Voltaremos a algumas considerações críticas sobre esse trabalho no final da seção dedicada à Escola Formalista que era uma das escolas rivais em relação à escola Logicista de Russell. Mas, retornemos à nossa análise da citação de Russell acima.

Tendo em mente a concepção russelliana de que toda a matemática nada mais é do que lógica formal -tal como vimos da primeira citação- Russell argumenta que a matemática pura parte de certas coisas que nos parecem razoáveis (“...that seems amusing”) e que mediante regras de inferência (válidas, nós supomos) podemos deduzir uma cadeia de resultados. É essencial que o que tomamos de partida como válido diga respeito a *qualquer coisa* (“anything”) e não a uma dada coisa e muito menos a uma dada e particular coisa, pois isso seria tarefa para a matemática aplicada. É possível se inferir que, para Russell, a matemática enquanto disciplina e, possivelmente também, a própria atividade do matemático tenham ambas uma grande autonomia em relação à realidade (física, por exemplo) no sentido de permitir abstrair *qualquer coisa* e partindo dessa *qualquer coisa*, mediante regras de inferência logicamente válidas (e talvez mesmo, universalmente válidas), deduzir verdades logicamente necessárias daquela *qualquer coisa*.

Ponto muito importante para se trazer à baila nas nossas considerações diz respeito ao fato de que para a atividade do matemático puro não interessa se aquela *qualquer coisa* que foi tomada como verdade de partida tenha ou não contrapartida na realidade. O fato realmente importante, segundo Russell, é que se aquela *qualquer coisa* for tomada como verdadeira então tais e tais coisas serão necessariamente verdadeiras em relação àquela *qualquer coisa*. Essa autonomia entre o que se toma de partida como verdadeiro e a própria realidade constituiria, segundo Russell, uma característica precípua da própria atividade da matemática pura. Quando, ao invés, se estabelece uma contrapartida entre aquela *qualquer coisa* e *alguma coisa* do mundo real, concretamente existente, então se entra no domínio da matemática aplicada e não mais da matemática pura. Quando Russell assevera que a matemática seria aquela disciplina ‘*da qual não sabemos do que estamos falando*’ isso se dá no sentido de realçar este caráter abstrato da matemática e de sua autonomia em relação à realidade ontológica. O que interessa, fundamentalmente, são as inferências lógicas a partir do que se admitiu de partida e não se o que se admitiu de partida tenha ou não contrapartida ontológica na realidade. Para quem defende que matemática nada mais é do que lógica formal, então o que está em foco são as inferências lógicas e não se o que se admitiu de partida seja ontologicamente verdadeiro. *Em outras palavras, no contexto da concepção russelliana de 1901, a única verdade que importa para a matemática pura é a verdade lógica e não a verdade ontológica.* Talvez pudéssemos daí inferir que, segundo Russell, as verdades ontológicas e, talvez também as verdades epistemológicas, seriam assuntos para a matemática aplicada.

Se aquilo que ‘*não sabemos do que estamos falando*’ se refere a um objeto abstrato *qualquer coisa*, a segunda parte da definição de matemática ‘*nem sequer sabemos do que estamos falando seja verdade*’ ressalta ainda mais que a única verdade que interessa à matemática pura é a verdade necessária das inferências lógicas.

Em uma outra instância, Bertrand Russell definiu a matemática de uma forma mais austera. Russell escreveu ¹⁰:

A matemática pura é a classe de todas as proposições que tenham a forma ‘ p implica q ’, onde p e q são proposições que contém uma ou mais variáveis as quais são as mesmas em ambas as proposições, e nem p nem q contém alguma constante a exceção das constantes lógicas. (RUSSELL apud BOYER, 1990: 689) . [A tradução é nossa].

Esse breve relato das características precípua da escola logicista pode nos ajudar na comparação com as concepções adotadas por outras escolas de pensamento. Passemos pois, na próxima seção, a tecer algumas considerações sobre uma outra escola de pensamento: a Escola *Intuicionista*.

Escola intuicionista

O núcleo central presente na concepção que funda a escola *intuicionista* é, como o próprio nome sugere, o papel central desempenhado pela *intuição*. Segundo os membros da escola *intuicionista*, até os princípios lógicos não escapariam à intuição. *Essa escola de pensamento atribui primazia à intuição intelectual ao invés de atribuí-la à lógica*. O que se conhece por escola *intuicionista* da matemática se configurou na primeira metade do século XX, mas há uma pré-história que pode ser remetida à época dos grandes cientistas-filósofos do século XVII como Pascal (1623-1662) e Descartes (1596-1650). Descartes atribuiu à intuição intelectual de clareza e distinção a fonte precípua do conhecimento. Nesse sentido estrito do termo, podemos, sem dúvida, considerá-lo como um precursor da escola *intuicionista* que emergiu alguns poucos séculos após. O filósofo alemão Kant (1724-1804) também pode, em larga medida, ser considerado como um grande precursor do intuicionismo quando asseverou que 'o espaço é uma representação a priori necessária que subjaz a todas as intuições externas' e que 'a representação originária do espaço é, portanto *intuição* a priori e não conceito'. Na sua *Crítica da Razão Pura*, na parte referente à *Doutrina Transcendental dos Elementos*, Kant escreveu o seguinte sobre o *espaço*:

- 1) O espaço não é um conceito empírico abstraído das experiências externas. Pois a representação de espaço já tem que estar subjacente para certas sensações se referirem a algo fora de mim (isto é, a algo num lugar do espaço diverso daquele em que me encontro), e igualmente para eu poder representá-las como fora de mim e uma ao lado da outra e por conseguinte não simplesmente como diferentes, mas como situadas em lugares diferentes. Logo a representação do espaço não pode ser tomada emprestada, mediante a experiência, das relações do fenômeno externo, mas esta própria experiência externa é primeiramente possível só mediante referida representação. (KANT, 1987: 41; 1^a edição de 1781 ; 2^a edição de 1787)
- 2) O espaço é uma representação a priori necessária que subjaz a todas as intuições externas. Jamais é possível fazer-se uma representação de que não

¹⁰ Na tradução italiana encontramos o seguinte texto: “La matematica pura è la classe di tutte le proposizioni aventi la forma ‘ p implica q ’, dove p e q sono proposizioni contenenti una o più variabili, le quali sono le stesse in entrambe le proposizioni, e né p né q contengono alcuna costante a eccezione delle costanti logiche.”

haja espaço algum, embora se possa muito bem pensar que não se encontre objeto algum nele. Ele é, portanto, considerado a condição da possibilidade dos fenômenos e não uma determinação dependente destes; é uma representação a priori que subjaz necessariamente aos fenômenos externos. (KANT, 1987: 41; 1ª edição de 1781; 2ª edição de 1787)

No que concerne à história (ou talvez à pré-história) da escola *intuicionista* da matemática na transição dos séculos XIX e XX, podemos citar Henry Poincaré (1854-1912) como um precursor historicamente mais avançado da escola *intuicionista*. Vejamos uma citação de Poincaré¹¹ extraída de seu livro *la Valeur de la Science* na qual a postura intuicionista é recomendada:

Se for permitido prosseguir minha comparação com as belas artes, o matemático que esquecesse a existência do mundo exterior seria semelhante a um pintor que saberia combinar harmoniosamente as cores e as formas, mas que lhe faltariam os modelos. Seu poder criador seria bem cedo esgotado. (POINCARÉ, 1970: 109; primeira edição francesa de 1905; esta tradução da citação para português é de nossa responsabilidade).

Nesta citação de Poincaré, a idéia de intuição que transparece não é propriamente aquela no sentido cartesiano da *intuição intelectual de clareza e distinção* que garantiria a certeza do que fosse verdadeiro e do que fosse falso. Também ela não tem o sentido que Kant atribui ao espaço de *uma representação a priori necessária que subjaz a todas as intuições externas*. Na citação acima, Poincaré se refere muito mais à intuição alimentada pelo contato com o mundo exterior, fonte de inspiração da criação matemática e fornecedora dos ‘modelos do mundo exterior’ sem os quais o poder criador seria em breve esgotado e, por conseguinte, seria transformado em estéril. Notamos que aquilo que podemos indiretamente conceber como *intuição* aparece aí muito mais no sentido de um *diálogo fértil da criação matemática com o mundo exterior*.

Isso tudo mostra o caráter polissêmico e poliédrico do termo *intuição*. Até aqui a *intuição* já desponta em pelo menos três sentidos: primeiramente no sentido cartesiano do que se chama *intuição intelectual da clareza e distinção*; em segundo, no sentido kantiano atribuído por exemplo ao *espaço enquanto representação a priori necessária que subjaz a todas as intuições externas*; em terceiro, no sentido em que Poincaré (pelo menos no que se depreende da citação acima) concebe como um *diálogo fértil da criação matemática com o mundo exterior*.

É possível ainda atribuir ao termo *intuição* pelo menos mais outros dois significados que são, muito provavelmente, conciliáveis entre si. São eles a *abdução* de Peirce¹² (1989) e aquele

¹¹ Tradução do texto original em francês seguinte: “Si l’on veut me permettre de poursuivre ma comparaison avec les beaux-arts, le mathématicien pur qui oublierait l’existence du monde extérieur, serait semblable à un peintre qui saurait harmonieusement combiner les couleurs et les formes, mais à qui les modèles feraient défaut. Sa puissance créatrice serait bientôt tarie.” (POINCARÉ, 1970: 109; primeira edição de 1905)

¹² O conceito de abdução de Peirce é muito importante. Para dar uma idéia vejamos três excertos. Vejamos o primeiro: “As três espécies de raciocínio são Abdução, Indução e Dedução. ...A indução determina o valor de uma quantidade. Acompanha uma teoria e mede o grau de concordância dessa teoria com os fatos. Não poderá nunca dar origem a uma nova idéia. Nem a dedução. Todas as idéias da ciência vêm através da Abdução. Abdução consiste em estudar fatos e inventar uma teoria para explicá-los. Sua única justificação é que, se for para entender as coisas deve fazer-se assim.” (PEIRCE, 1989: 9). Vejamos o segundo excerto: “Abdução é o processo para formar hipóteses explicativas. É a única operação lógica a introduzir idéias novas; pois que a indução não faz mais do que determinar um valor, e a dedução envolve apenas as conseqüências necessárias de uma pura hipótese.” (PEIRCE, 1989: 14). Vejamos finalmente o

expresso por Einstein¹³ (1993:135-139) em uma carta escrita ao seu amigo Solovine no dia 7 de maio de 1952. Tais conceitos são muito importantes, mas por razões de delimitação de espaço não serão tratados aqui no corpo do texto central.

Mas retornemos à crítica de Poincaré. No capítulo *A Lógica do Infinito* de seu livro *Últimos Pensamentos*, Poincaré argumenta contra o tratamento de conjuntos infinitos ou coleções infinitas por meio de uma mera passagem a partir daquilo que se estabeleceu para os conjuntos finitos ou coleções finitas de objetos. Poincaré argumenta:

Não há infinito atual, e quando falamos de uma coleção infinita, queremos dizer uma coleção a qual se podem incessantemente juntar novos elementos (semelhantes a uma lista de subscrições que jamais fosse encerrada na expectativa de novos subscritores). (POINCARÉ, 1924: 86 ; primeira edição francesa de 1913)¹⁴

Repare que o termo *atual* que aparece acima tem o sentido daquilo que se tornou *ato*. Isso pode ser bem entendido à luz da teoria aristotélica do *ato* e *potência*. O termo *potência* se refere àquilo que pode vir a ser, mas ainda não é; refere-se, portanto, ao *universo de possibilidades* ou seja, ao *universo de potencialidades* ou, simplesmente, a tudo o que for *potencial*. O termo *ato* se refere, por seu lado, à possibilidade que se *atualizou*, ou dito ainda de outro modo, à *possibilidade* ou *potencialidade* que se *realizou*. Logo o termo *atual* que aparece na citação de Poincaré acima pode ser traduzida por *real*. O que Poincaré argumenta é que não há um infinito que seja simplesmente *ato* pois todo infinito é infinito apenas em potência ou ainda, os infinitos são, de fato, infinitos potenciais.

Nesta linha de argumentação Poincaré escreve:

Há bons espíritos que consideram que os únicos objetos sobre os quais é permitido raciocinar, são aqueles que podem ser definidos em número finito de palavras, e eu não poderia razoavelmente deixar de considerá-los como bons espíritos, porquanto vou defender a opinião que professam. (POINCARÉ, 1924: 88 ; primeira edição francesa de 1913)

Poincaré resume as suas idéias sobre as coleções infinitas de elementos da seguinte maneira:

- 1) Considerar somente objetos suscetíveis de ser definidos em um número finito de palavras;
- 2) Jamais perder de vista que toda a proposição sobre o infinito deve ser a tradução, o enunciado abreviado de proposições sobre o finito;
- 3) Evitar as classificações e as definições não predicativas. (POINCARÉ, 1924: 116-117 primeira edição francesa de 1913)

terceiro excerto: “ A inspiração abdutiva acontece em nós num lampejo. É um ato de *insight*, embora extremamente falível. É verdade que os elementos da hipótese estavam antes em nossa mente; mas é a idéia de associar o que nunca antes pensáramos em associar que faz lampear a inspiração abdutiva em nós.” (PEIRCE, 1989: 19).

¹³ O teor desta carta de Einstein está também analisada no livro *A Imaginação Científica* de Gerald Holton (HOLTON, 1979: 93-98).

¹⁴ Tomamos uma tradução brasileira de 1924 na qual o texto em português aparece com uma ortografia antiga e em desuso. Fizemos algumas alterações meramente ortográficas no intuito de proceder a sua atualização.

É importante ressaltar que essa concepção de não aceitar considerações sobre conjuntos infinitos será uma marca da escola *intuicionista* de matemática. Vale ainda a pena tecer algumas considerações sobre o que Poincaré entende por classificações e definições *predicativas*. Vejamos o seguinte texto de Poincaré :

Se considerarmos duas coleções pode-se tentar estabelecer uma lei de correspondência entre os objetos dessas duas coleções, de modo que a todo objeto da primeira corresponda um objeto da segunda e um único, e inversamente. Se isso for possível, diz-se que as duas coleções têm o mesmo número cardinal. Mas ainda aqui, convém que essa lei de correspondência seja predicativa. Se tratamos de duas coleções infinitas, nunca poderemos conceber que essas duas coleções estão esgotadas. Se supusermos que tomamos na primeira certo número de objetos, a lei de correspondência nos permitirá definir os objetos correspondentes da segunda. Se, em seguida, introduzirmos novos objetos, poderá acontecer que essa introdução mude o sentido da lei de correspondência, de tal modo que o objeto A' da 2ª coleção, que, antes dessa introdução, correspondia a um objeto A da 1ª, já não corresponderá depois dessa introdução. Nesse caso a lei de correspondência não será predicativa. (POINCARÉ, 1924: 90-91 primeira edição francesa de 1913)

A primeira parte da citação acima constitui uma referência ao conceito de correspondência biunívoca, ou seja, à correspondência consubstanciada pelo seguinte: a um dado elemento da primeira coleção corresponde apenas um elemento da segunda e inversamente. No que se refere ao termo *predicativa*, podemos dizer que a lei apenas será assim se a introdução de novos elementos não alterar essa correspondência.

Mais tarde a escola *intuicionista* de matemática a partir de Brouwer (1881-1966) manterá essa mesma crítica aos conjuntos infinitos expressa por Poincaré e também acrescentará à sua crítica outros elementos. Mas teçamos algumas considerações ainda sobre o pensamento de Poincaré. É muito instrutivo lançar os olhos para a maneira com que ele encerra o capítulo *A Lógica do Infinito* de seu livro *Últimos Pensamentos*. Diremos que ela nos instrui de maneira clara sobre o que podemos interpretar legitimamente acerca do termo *intuição*, se bem que o excerto extraído cuja tradução em português fizemos uso não explicita a palavra *intuição*. Na tradução aparece o termo *psicologia*. No entanto, o contexto em que Poincaré usa o termo *psicologia*, ou ainda o termo *psicológico*, não deixa dúvidas de que a nossa inferência é perfeitamente legítima. Em relação ao que Poincaré tem em mira trata-se de uma dupla crítica: em primeira instância há uma crítica a uma escola de pensamento que ele não esposa (que emprega o infinito em matemática de uma maneira que ele não concorda) e às conseqüências educacionais decorrentes quando esse uso assume um papel de destaque no ensino de matemática. Poincaré escreve:

Todas as pesquisas a que nos referimos, apresentam um caráter comum. Tem-se em vista ensinar as matemáticas a um discípulo que ainda não conhece a diferença que há entre o infinito e o finito; não se tem pressa em ensinar-lhe em que consiste essa diferença. Começa por mostrar-lhe tudo quanto se pode saber do infinito, sem levar em conta essa distinção; depois, numa região distante do campo que ele percorre, descobre-se ao discípulo um pequeno canto em que se

ocultam os números finitos. Isso me parece *psicologicamente* falso; *não é desse modo que o espírito humano procede naturalmente*, e mesmo que se pudesse tratar devidamente do assunto sem demasiadas questões antinômicas, isso não deixaria de ser um *método contrário à sã psicologia*. [As ênfases em caracteres *itálicos* foram por nós adicionadas]. (POINCARÉ, 1924: 117 ; primeira edição francesa de 1913)

Está ai posta, com todas as letras, a crítica de Poincaré dirigida primeiramente, contra um ensino que vai na contramão daquilo que o *espírito humano procede naturalmente* e, em segundo lugar, constitui uma crítica a uma pesquisa cuja metodologia já levou a muitas antinomias¹⁵. Acrescenta ainda Poincaré que mesmo que tais pesquisas não tivessem conduzido a antinomias, ainda assim essa metodologia deveria ser evitada pois é claramente contrária à *sã psicologia*. Podemos interpretar – a nosso ver muito legitimamente – que a expressão *sã psicologia* é muito próxima da expressão *sã intuição*. Aqui, neste interessante excerto, transparece uma acepção de intuição no sentido daquilo que o espírito humano procede naturalmente. Essa acepção é um tanto quanto diferente – se bem que perfeitamente ajustável e complementar – àquela concepção de intuição que acima tivemos oportunidade de comentar no excerto extraído em *La Valeur de la Science* quando Poincaré faz um paralelo entre um pintor que sabe combinar harmoniosamente as cores, mas que carece de inspiração para a construção de seus modelos, e um matemático que esquecesse a fonte de inspiração do mundo exterior e que assim o seu poder criador em breve estaria exaurido. Intuição aí aparece como um *diálogo fértil* da criação matemática (e obviamente de seu criador) com o mundo exterior. Esse diálogo seria a fonte de *intuição criadora*. Essa análise em nada se contradiz com os outros tipos de intuição que analisamos. Muito pelo contrário, elas se harmonizam e se complementam. Evidentemente, é necessário ponderar que a certeza cartesiana garantida pela intuição da clareza e distinção e o caráter *a priori* verdadeiro do espaço *à la* Kant necessitam de importantes retoques posto que o real é bem mais complexo do que sonha a nossa vã filosofia, o que ainda mais reforça a reivindicação de uma *epistemologia complexa* que inclua um sério e inesgotável diálogo fértil entre a criação e o mundo fora de nós.

Mas vejamos o parágrafo final com o qual Poincaré encerra o seu capítulo *A Lógica do Infinito* antecipando uma provável crítica que Bertrand Russell poderia fazer sobre a sua adoção filosófica:

O sr. Russell me dirá sem dúvida que não se trata de psicologia, mas de lógica e de epistemologia; e eu responderei que não há lógica e epistemologia independentes da psicologia. Essa profissão de fé encerrará, provavelmente, a discussão, porque porá em evidência uma divergência de vistas irremediável. (POINCARÉ, 1924: 117 primeira edição francesa de 1913)

¹⁵ Muito provavelmente Poincaré se refere à *antinomia de Russell* (também conhecida como *paradoxo de Russell*) surgida no seio da teoria dos conjuntos. Trata-se do impasse em relação à solução do seguinte problema: *O conjunto de todos os conjuntos não auto-inclusivos é ou não auto-inclusivo?* Como sabemos, um conjunto auto-inclusivo é aquele que se inclui a si próprio como um elemento do conjunto. Ora, quaisquer que sejam as respostas para este problema (se sim ou se não) nos conduzem a uma situação paradoxal.

Mais uma vez podemos constatar que o termo *psicologia* seria melhor interpretado pelo termo *intuição*. Aí Poincaré explicita a sua divergência irreconciliável em relação a Bertrand Russell. Para este último a matemática é lógica simbólica e deste modo os princípios lógicos têm a primazia. Para Poincaré, no entanto, a *intuição* (por mais polissêmico e poliédrico que esse termo seja) é quem tem a primazia. A *psicologia* a que Poincaré se refere está intimamente ligada à *intuição* que viria a ser defendida, um pouco depois, pela escola intuicionista de matemática.

Trata-se precisamente daquela tensão entre quem tem a primazia. Tal como Kline ¹⁶ resume, essa tensão entre primazias assume o seguinte sentido para os intuicionistas:

Os intuicionistas por isso procedem a análise de quais sejam os princípios lógicos permitidos de tal maneira a fazer com *que a lógica usual seja adequada às intuições corretas e propriamente as expressem*. (KLINE, 1980: 237 ; a tradução para o português é de nossa responsabilidade)

Exatamente aí aparece a crítica dos intuicionistas, não tão somente em relação à generalização pura e simples a partir daquilo que acontece com um conjunto finito de objetos para um conjunto infinito como também em relação à lei do *terceiro excluído* da lógica clássica.

Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966) é considerado como sendo quem instituiu – podemos assim dizer – o que então passou a se chamar de Escola *Intuicionista* da Matemática. Podemos considerar que isso tem lugar a partir de sua tese de doutorado defendida em 1907, intitulada *Sobre os Fundamentos da Matemática*. Numa segunda instância Brouwer aprofundou o seu pensamento e a partir de 1918 publicou uma série de artigos defendendo a adoção filosófica do intuicionismo (Kline, 1980: 234).

Em relação ao princípio do *terceiro excluído* da lógica clássica (ver a primeira nota de rodapé), os intuicionistas argumentavam que como não existe método algum para se decidir sobre se em algum ponto da representação decimal do número ? aparece ou não a sucessão 123456789, então, isso acarretaria uma terceira alternativa e, deste modo, o princípio do terceiro excluído estaria seriamente comprometido.

O importante matemático Hermann Weyl (1885-1955) que adotava a filosofia intuicionista resumiu assim ¹⁷ a crítica dos intuicionistas tanto aos conjuntos infinitos quanto ao princípio do terceiro excluído:

¹⁶ “The intuitionists therefore proceed to analyse which logical principles are allowable in order *that the usual logic conform to and properly express the correct intuitions*.” (KLINE, 1980: 237).

¹⁷ O texto correspondente em inglês é: “The principle of excluded middle may be valid for God who surveys the infinite sequence of natural numbers, as it were, with one glance, but not for human logic”. (WEYL apud KLINE, 1980: 237).

O princípio do terceiro excluído pode ser válido para Deus que é quem tem controle sobre a seqüência infinita de números naturais apenas com uma olhadela mas não para a lógica humana. (WEYL apud KLINE, 1980: 237 ; esta tradução para o português é de nossa responsabilidade)

Passemos pois a tecer considerações sobre a escola Formalista de matemática.

Escola formalista

Se em uma breve frase tivermos que dizer em que consiste o cerne do programa de pesquisa da Escola *Formalista* de Matemática diríamos que esse cerne reside precisamente em depurar a matemática de qualquer *inconsistência*. Por *consistência* deveremos entender algo como *ausência de contradição*.

Na seção 3 de seu capítulo *Que é a Dialética?* de seu livro *Conjecturas e Refutações*, Popper exhibe uma epígrafe de David Hilbert – o proeminente líder da escola *formalista* – em que se lê¹⁸:

A idéia de que fatos ou eventos possam contradizer-se mutuamente me parece o próprio paradigma da irreflexão. (HILBERT apud POPPER, 1982: 361)

Ora a seção 3 do capítulo de Popper intitulada *A Dialética após Hegel* faz parte do ataque de Popper a Hegel quando esse último elege a contradição como virtude suprema. Podemos então considerar que, em certo sentido, os programas respectivamente, Hegeliano e Popperiano, são antitéticos, ou seja, um é o oposto diametral do outro. No entanto, também em certo sentido, essa caracterização é inadequada, e até um grande mal-entendido, pois esses programas se referem a coisas distintas e mesmo a acepções distintas do termo *contradição*. Portanto, o nosso interesse em trazer à baila a epígrafe é simplesmente o de ressaltar, com ênfase, o programa de Hilbert que consiste em depurar a matemática de qualquer contradição. Mas centremos a nossa atenção sobre a Escola *Formalista* de Matemática.

Podemos ler em Boyer¹⁹ que alguns seguidores da escola formalista desenvolveram tal concepção a níveis extremos e concluíram que:

...a matemática não é outra coisa que um jogo sem significado no qual se joga com sinais sem significado segundo certas regras formais acordadas de antemão. (BOYER, 1990: 702; esta tradução para o português é de nossa responsabilidade)

¹⁸ Na edição em língua inglesa do livro *Conjectures and Refutations* de Popper, a epígrafe representativa de Hilbert é a seguinte: “The thought that facts or events might mutually contradict each other appears to me as the very paradigm of thoughtlessness.” (POPPER, 1989: 331)

¹⁹ Na tradução italiana do livro de Boyer o texto correspondente é: “... la matematica non è altro che un gioco privo di significato in cui si gioca con contrassegni privi di significato secondo certe regole formali concordate in partenza.” (BOYER, 1990: 702).

À primeira vista, uma tal concepção poderia parecer bastante próxima da concepção dos *logicistas* como Russell para quem a matemática pura não é outra coisa senão lógica e que não interessaria a atribuição de significados extra lógicos às premissas adotadas, pois, segundo o seu parecer, a única verdade que importa é a verdade lógica das premissas adotadas e de suas conseqüentes inferências e não se aquilo que se postulou de partida tenha ou não contrapartida na realidade, contrapartida essa que seria função da matemática aplicada, mas não da matemática pura.

O seguinte texto de Kline ²⁰ pode nos ajudar a esclarecer a diferença entre as escolas *logicista* e *formalista* de matemática:

Os axiomas lógicos assumidos por Hilbert não são essencialmente diferentes daqueles de Russell embora Hilbert tenha assumido mais pelo fato dele não ter se dedicado ao estabelecimento de uma base axiomática para a lógica. No entanto, pelo fato, segundo Hilbert, *de que não se pode deduzir a matemática apenas a partir da lógica* – a matemática não é uma conseqüência da lógica e sim uma disciplina autônoma – cada ramo deve ter os axiomas apropriados de ambos, matemática e lógica. Além do mais a maneira mais confiável de se conceber a matemática é de olhar para ela não como um conhecimento factual e sim como uma disciplina formal, isto é, abstrata, simbólica, e sem referência a significado (mesmo que, informalmente, se faça entrar significado e relação com a realidade). Deduções são simplesmente manipulações de símbolos de acordo com os princípios lógicos. [As ênfases em caracteres itálicos foram por nós acrescentadas]. (KLINE, 1980: 247 esta tradução para o português é de nossa responsabilidade)

Do que podemos depreender desta citação de Kline, a diferença essencial entre as escolas *logicista* e *formalista* residiria fundamentalmente na divergência quanto à resposta acerca da questão *da redução ou não da matemática à lógica: enquanto para os logicistas a matemática pura é redutível à lógica, para os formalistas, a matemática se constitui em disciplina autônoma*.

O expoente André Weil da famosa escola Bourbaki da matemática – escola essa que não tomou propriamente partido nessa contenda mas que tinha um programa rigoroso de reconstrução de tudo que fosse válido na história da matemática e que também não nutria muita simpatia pelas concepções intuicionistas – assim se declarou ²¹:

²⁰ “ The logical axioms that Hilbert assumed are not essentially different from Russell’s, though Hilbert assumed more because he was not as concerned with establishing an axiomatic basis for logic. However, because, according to Hilbert, *one cannot deduce mathematics from logic alone* – mathematics is not a consequence of logic but an autonomous discipline – each branch must have the appropriate axioms of both logic and mathematics. Moreover, the most reliable way to treat mathematics is to regard it not as factual knowledge but as a formal discipline, that is, abstract, symbolic, and without reference to meaning (though, informally, meaning and relation to reality do enter). Deductions are to be manipulations of symbols according to logical principles.” (KLINE, 1980: 247) [As ênfases em caracteres itálicos foram por nós acrescentadas]

²¹ No livro de Boyer encontramos a citação: “Se la logica è l’igiene del matematico, non gli fornisce però alcun cibo.” (WEIL, 1950; WEIL apud BOYER, 1990: 719)

Se a lógica é a higiene do matemático, ela não lhe fornece sequer algum alimento. (WEIL, 1950; WEIL apud BOYER, 1990: 719 Tradução para o português é de nossa responsabilidade)

?

Uma tal citação mostra que há mais na matemática do que simplesmente lógica e se a matemática deve ser balizada pela lógica, isso não acarreta que a matemática seja redutível à lógica tal como defendem os logicistas.

Hilbert²² assim se expressou contra os logicistas e intuicionistas:

Para descobri-la [a matemática] eu não preciso de Deus, como faz Kroneker, ou uma hipótese de uma faculdade especial do entendimento ajustada ao princípio da indução matemática, como faz Poincaré [que foi quem disse que usando a indução matemática não se poderia provar a consistência de um sistema], ou a intuição primeira de Brouwer, ou finalmente, como fazem Russell e Whitehead, axiomas de infinitude, redutibilidade, ou completeza os quais são de fato proposições reais e substanciais, mas que não são capazes de se tornar estabelecidas mediante uma prova de consistência. (HILBERT apud KLINE, 1980: 246 esta tradução para o português é de nossa responsabilidade)

A alusão a Leopold Kronecker (1823-1891) que era um precursor do *intuicionismo* era em relação à sua famosa frase “*Deus fez os números naturais; todo o resto é obra dos homens*”²³. Vejamos agora à alusão a Poincaré. Como se sabe, Poincaré argumentou que a indução matemática não era suficiente para provar a consistência de um sistema e devido a essa insuficiência dever-se-ia lançar mão de uma faculdade especial do entendimento que claramente constitui uma alusão a uma faculdade intuitiva. A dispensa hilbertiana de uma *faculdade especial do entendimento à la Poincaré* pode tranquilamente ser interpretada como expressando uma confiança de que o seu programa de pesquisa fosse capaz de provar a consistência (ausência de contradição) de toda a matemática. A referência a Brouwer é curtíssima. Segundo Hilbert, o seu programa de pesquisa não requereria em momento algum essa *intuição primeira*. A crítica a Russell e a Whitehead tem um lado de aprovação quanto à pertinência dos axiomas da infinitude, redutibilidade e completeza, mas que esses não seriam capazes de conduzir a uma prova de consistência.

Era portanto, segundo Hilbert, preciso estabelecer provas rigorosas de consistência de toda a matemática.

²² O texto correspondente em inglês é: “ To found it [mathematics] I do not need God, as does Kronecker, or the assumption of a special faculty of understanding attuned to the principle of mathematical induction, as does Poincaré [who had said that the consistency of a system using mathematical induction could not be proved], or the primal intuition of Brouwer, or finally, as do Russell and Whitehead, axioms of infinity, reducibility, or completeness which are indeed real and substantial propositions, but not capable of being established through a proof of consistency. (HILBERT apud KLINE, 1980 : 246)

²³ “Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.” Agradecemos a um dos árbitros que, além de nos fornecer a citação original em alemão, nos apontou que Kronecker aqui estava tratando dos números naturais e não dos inteiros.

Retomemos agora àquela definição de matemática dada em 1901 por Bertrand Russell em famosa publicação no *International Monthly*, a qual tivemos a oportunidade de tecer considerações na seção dedicada à Escola Logicista. Russell, como sabemos, foi um autor de grande fertilidade tendo escrito vários livros tanto no século XIX quanto durante as sete décadas em que viveu no século XX. Uma vida intelectual assim tão ativa de alguém que teve uma vida quase centenária (Russell morreu aos 98 anos de idade) deve ser analisada em períodos. Em outras palavras perguntaríamos se o jovem Russell de 1901 (que ainda não tinha 30 anos de idade) e o Russell maduro de 1937 eram, de fato, e de um ponto de vista intelectual, o mesmo Russell.

Ora, em 1937 Russell procedeu a uma crítica aos formalistas que tem o seguinte teor:

Os formalistas são como um relojoeiro que está tão absorvido em fazer com que o seu relógio pareça perfeito que esqueceram que o seu objetivo é marcar as horas e por isso esqueceram de atribuir a ele qualquer função. (RUSSELL apud KLINE, 1980: 251; esta tradução para o português é de nossa responsabilidade)²⁴

Um pouco mais adiante Kline comenta, provavelmente seguindo de perto a própria argumentação de Russell, que as definições da escola logicista eram tais que faziam uma conexão entre o mundo real inteligível enquanto as correspondentes formalistas não.

Se compararmos o Russell de 1901 que dizia que “*a matemática pode ser definida como o assunto em que nós nunca sabemos do que estamos falando, nem se o que estamos dizendo é verdade*” que, como vimos, atribui o interesse da matemática à verdade lógica e não à verdade ontológica, com o Russell de 1937 que, bastante diferente do anterior, passa a reivindicar uma espécie de conexão com o mundo real, então veremos que há uma diferença considerável e que aqui é importante trazer à baila nas nossas considerações.

Finalizemos esta seção sobre a escola Formalista de matemática dizendo que a obsessão de Hilbert em prol da importância toda especial em relação ao problema da *consistência*, e que se constituía em um importante ponto de seu programa de pesquisa, encontrou um sério obstáculo com o teorema da incompletude de Gödel em 1931.

Ora, desde que estruturas axiomáticas rigorosas que contenham a aritmética se deparam com algumas proposições legítimas em relação às quais não podemos decidir dicotomicamente entre veracidade e falsidade, então elas são rigorosamente indecidíveis. O programa de pesquisa de Hilbert sofreu um grande abalo. Passemos agora a algumas considerações sobre a Escola baseada nos fundamentos da teoria dos conjuntos.

Escola fundada na teoria dos conjuntos

A Escola de pensamento na matemática que pode ser chamada de *conjuntista* adota que os fundamentos em cima dos quais os matemáticos devem erigir uma matemática sólida são aqueles da teoria dos conjuntos.

²⁴ O texto original em inglês é: “The formalists are like a watchmaker who is so absorbed in making his watches look pretty that he has forgotten their purpose of telling the time, and has therefore omitted to insert any works.” (RUSSELL apud KLINE, 1980: 251)

Cantor (1845-1918) e Dedekind (1831-1916) podem ser considerados como precursores daquilo que mais tarde viria a se constituir na Escola Conjuntista de matemática. A teoria dos conjuntos de Cantor é uma tal muito próxima daquilo que se poderia considerar como uma intuição primeira ou *prima facie* do tema. Essa teoria não é rigorosa e devido a isso os matemáticos sentiram a necessidade de proceder a uma axiomatização da teoria com o fito de eliminar ambigüidades e imprecisões nela presentes. A teoria de conjunto primitiva inclusive é conhecida como *teoria ingênua dos conjuntos*. Como sabemos, a teoria dos conjuntos de Cantor levou a contradições e “paradoxos”. Segundo o relato de Struik (1992: 320), já era a terceira vez que acontecia algo do gênero na história da matemática.

A primeira contradição houvera sido a descoberta pitagórica dos irracionais (números que não podem ser escritos como uma razão entre dois números inteiros) números esses que aos olhos pitagóricos não eram compatíveis com a própria natureza daquilo que eles concebiam como sendo número. Como sabemos, se admitíssemos que a razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado pudesse ser escrita como uma razão entre dois números inteiros, isso seria equivalente a admitir a contradição ensejada na admissão do “mesmo número ser par e ímpar”, ou em outras palavras, seria equivalente a admitir a incorporação de uma contradição explícita. Esse problema percorreu uma longa história que podemos arbitrar em 25 séculos até a solução de Dedekind na segunda metade do século XIX (ver Caraça, 1984).

A segunda vez em que apareceu outro tipo de contradição foi em relação ao cálculo; segundo o que nos escreve Struik:

...as contradições na fundamentação do cálculo na época de Newton, em que uma quantidade h ou dx tinha de ser zero e não ser zero na mesma operação. (STRUIK, 1992: 320)

Struik prossegue emitindo um parecer sobre esses dois tipos de contradição acima aludidos; escreve ele, a propósito:

Em ambos os casos, ...os matemáticos não se interessaram muito ou mesmo nada e continuaram alegremente convencidos de que, apesar de tudo, a sua ciência era “verdadeira”. Acontecia o mesmo mais uma vez? Os paradoxos resultantes da teoria de Cantor eram bem diferentes. (STRUIK, 1992: 320).

Ainda seguindo o relato de Struik, a terceira vez em que apareceu contradição na história da matemática foi como uma decorrência da teoria dos conjuntos. Em 1903, Bertrand Russell colocou o dedo na ferida da teoria dos conjuntos com o seu famoso paradoxo. O paradoxo de Russell, como se sabe, constitui-se no impasse que se encontra a fim de tentar dar uma solução para o problema: *O conjunto de todos os conjuntos não auto-inclusivos é ou não auto-inclusivo?* Ora, como sabemos, um conjunto é auto-inclusivo²⁵ quando ele próprio se inclui como um elemento do conjunto. Para qualquer que seja a resposta dada para o problema de Russell (se sim ou se não) seremos levados a uma contradição. Fazia-se então mister a introdução de critérios mais rigorosos a fim de que se pudesse eliminar armadilhas semânticas como aquelas implicadas por termos como ‘*todos*’. O caminho para se alcançar essa finalidade seria o de se proceder a uma axiomatização da teoria dos conjuntos.

²⁵ Por exemplo, ‘o conjunto de todas as idéias’ é uma idéia. Logo, o ‘conjunto de todas as idéias’ é um elemento do ‘conjunto de todas as idéias’, e deste modo é também um conjunto auto-inclusivo.

O matemático Ernest Zermelo (1871-1953) tomou para si essa tarefa em 1908. Em 1922 A. Fraenkel (1891-1965) melhorou a base axiomática inicialmente proposta por Zermelo redundando naquilo que viria a ser considerado como o sistema de Zermelo-Fraenkel. Essa base ainda sofreu alguns retoques como aqueles aportados pela crítica de Gödel e de Bernay.

Vejamos os axiomas de Zermelo-Fraenkel:

- [1] Dois conjuntos são idênticos se eles têm os mesmos membros.
- [2] Existe o conjunto vazio.
- [3] Se x e y são conjuntos, então o par não ordenado $\{x,y\}$ é um conjunto.
- [4] A união de um conjunto de conjuntos é um conjunto.
- [5] Existem conjuntos infinitos.
- [6] Qualquer propriedade que possa ser formalizada na linguagem da teoria pode ser usada para definir um conjunto.
- [7] Pode-se formar o conjunto das partes (power set) de qualquer conjunto. Esse processo pode ser repetido indefinidamente; isto é, considere o conjunto de todos os subconjuntos de qualquer dado conjunto como um novo conjunto; o conjunto das partes (power set) desse conjunto é um novo conjunto.
- [8] Axioma da Escolha.
- [9] x não pertence a x . (KLINE, 1980: 254-255 ; tradução nossa)

Como podemos constatar pelas nossas discussões até então, os *intuicionistas* na linha de Poincaré, Brouwer e Weyl, não viriam a apreciar a presença de elementos que pressupusessem a existência dos *conjuntos infinitos* tal como se dá na base axiomática de Zermelo-Fraenkel pois tais *conjuntos infinitos* fugiriam a toda e qualquer intuição, além de se constituírem em algo que está além de qualquer experiência. Segundo o testemunho de Struik (1992: 320), Poincaré também não aceitava o *axioma da escolha*.

O axioma da escolha (“*Auswahlaxiom*” em alemão) – denotado por [8] na lista acima dos axiomas de Zermelo-Fraenkel - pode ser enunciado de uma maneira verbal da seguinte forma:

Dada uma classe de classes disjuntas (mutuamente exclusivas), nenhuma das quais é uma classe nula ou vazia, então existe uma classe composta de exatamente um elemento extraído de cada uma das classes e de nenhum dos outros elementos. (KLINE, 1980: 225 ; tradução nossa)²⁶

Kline, em continuação ao texto da citação acima escreve que esse axioma gerou mais controvérsias e discussões do que quaisquer outros axiomas da história da matemática com exceção, muito possivelmente, do axioma das paralelas de Euclides.

O axioma denotado por [9] é claramente uma maneira de se evitar o paradoxo de Russell. Isso porque com a base axiomática proposta por Zermelo-Fraenkel elimina-se a possibilidade de contradição ensejada pelo paradoxo de Russell uma vez que um conjunto x não pode se incluir como pertencente a si próprio.

²⁶ O texto correspondente em inglês a partir do qual fizemos a tradução é o seguinte: “Given a class of disjoint (mutually exclusive) classes, none of which is the null or empty class, then there exists a class composed of exactly one element from each class and of no other elements.” (KLINE, 1980: 225)

Em 1936 um conjunto de matemáticos, a maioria dos quais franceses, propuseram um programa de pesquisa de fôlego que se constituía em rescrever toda a matemática válida numa espécie de reorganização do pensamento que implicasse também numa grande economia de pensamento. Tratava-se da assim chamada escola *Nicholas Bourbaki*. Este nome não é de nenhum matemático em especial e sim um pseudônimo coletivo de todos aqueles que abraçassem a causa. Essa escola já produziu mais de trinta volumes de respeitável conteúdo.

O núcleo duro dessa escola pode ser descrito *grosso modo* assim: aceitação da base axiomática de Zermelo-Fraenkel, com as modificações de Gödel e Bernay, e além disso, com a adição de alguns princípios da lógica. Segundo os Bourbakistas, pode-se erigir toda a matemática sobre tais fundamentos. (Kline, 1989: 256).

Em relação às contradições surgidas ao longo da história da matemática, os membros da escola Bourbaki manifestaram a sua confiança em que elas historicamente sempre foram superadas em instâncias ulteriores e que não havia motivos para se duvidar do futuro da matemática. Deste modo, essa escola mantinha uma posição de otimismo cognitivo. Assim, eles não se preocuparam com o problema da consistência que era uma obsessão da escola formalista capitaneada por Hilbert. Sobre isso, assim os Bourbakistas se manifestaram:

Nós simplesmente notamos que essas dificuldades podem ser superadas de uma maneira que torna óbvia todas as objeções e permita, sem dúvida, confiar no aspecto correto do raciocínio ... Durante vinte e cinco séculos os matemáticos têm corrigido os seus erros e, como conseqüência, têm visto a sua ciência se enriquecer e não se empobrecer; isso dá a eles o direito de contemplar o futuro da mesma maneira. (BOURBAKISTAS apud KLINE, 1980: 257 tradução nossa)²⁷

Esse programa de pesquisa dos Bourbakistas era centrado nos desenvolvimentos assentados nos fundamentos da teoria dos conjuntos e desta maneira se diferenciava da obsessão por consistência da escola formalista, tal como pudemos constatar pelo teor das citações precedentes. Ora, os Bourbakistas não tinham uma preocupação pela depuração em prol da *consistência* porque concebiam que historicamente a superação das contradições constituía-se inerentemente no espírito da própria matemática. Os Bourbakistas também não compartilhavam do programa logicista de redução da matemática à lógica pois concebiam que a lógica não pode nem controlar nem dizer o que a matemática é e faz. Os Bourbakistas também não tinham qualquer simpatia pelos intuicionistas e até mesmo podemos dizer que tinham um parecer bastante duro sobre esses últimos. Os Bourbakistas assim se expressaram em relação aos seus rivais intuicionistas:

A memória da escola intuicionista estará destinada, sem dúvida, a sobreviver apenas como uma curiosidade histórica. (BOURBAKISTAS apud KLINE, 1980: 241 ; tradução nossa)²⁸

²⁷ Vejamos o correspondente texto em inglês: “We simply note that these difficulties can be surmounted in a way which obviates all the objections and allows no doubt as to the correctness of the reasoning. ...For twenty-five centuries mathematicians have been correcting their errors, and seeing their science enriched and not impoverished in consequence; and this gives them the right to contemplate the future with equanimity.” (BOURBAKISTAS apud KLINE, 1980: 257)

²⁸ O texto correspondente em inglês é: “The memory of the intuitionist school will without doubt be destined to survive only as a historical curiosity.” (BOURBAKISTAS apud KLINE, 1980: 241)

E com este parecer duro dos Bourbakistas em relação à escola intuicionista de matemática, encerramos esta seção.

Deveremos proceder a uma comparação desses conflitos e explorar acerca da lição que podemos tirar dessa polêmica entre concepções rivais no que diz respeito às suas potencialidades pedagógicas.

O que é enfim a Matemática? Qual a sua natureza?

Então podemos perguntar o que é a matemática enfim e qual é a sua natureza. Como vimos os próprios matemáticos não estão de acordo com a natureza de sua própria disciplina o que mostra que o alcance e a abrangência de uma disciplina (qualquer que seja ela e a matemática em particular) não se esgotam no seu conteúdo estrito. Muito contrariamente ao que se diz, os problemas suscitados pela pesquisa matemática não conduzem a soluções tão consensuais como estamos acostumados a ouvir principalmente por parte de pessoas muito distantes da pesquisa matemática.

Seria a matemática redutível à lógica como apregoam os logicistas? Seria a matemática regida e balizada pela intuição como apregoam os intuicionistas e deste modo não redutível aos princípios lógicos, pois esses mesmos princípios devem ser balizados pelas intuições corretas? Seria a matemática mero jogo em que são envolvidos sinais sem significado segundo regras acordadas de antemão como apregoam os formalistas para quem a única coisa que interessa é a depuração de toda e qualquer contradição? Seria o fundamento sobre a teoria de conjuntos o caminho mais sólido e seguro para a matemática?

Evidentemente as questões listadas acima são gigantescas e não permitem eventuais respostas simples. Mesmo se estivermos tentados a dizer, inspirados na citação de Weil, de que a pesquisa matemática não se esgota meramente na sua higiene posto que existe mais na matemática do que meramente lógica e que a história da matemática, tal com mostrou muito bem Kline (1980), está repleta de desenvolvimento “ilógicos” e carentes de depuração ulterior em busca de um mínimo de consistência aceitável, não podemos dizer, por si só, que isso favoreceria a *intuição* tal como apregoam os intuicionistas. Ora, como vimos, o termo *intuição*, além de poliédrico e altamente polissêmico, não se constitui numa faculdade meramente redutível à lógica. Somos da opinião de que a *intuição* é necessária tanto para a ciência quanto para a própria vida e junto com a *imaginação* (que é difícil de se separar dela) constitui-se em algo, talvez ainda mais importante do que a crítica, o que não significa dizer que a crítica não seja de importância fundamental para nos ajudar a separar o joio do trigo. Pensadores seminais como Pascal, Descartes, Kant, Peirce, Bergson, Einstein²⁹, Popper, entre outros, refletiram sobre a intuição o que mostra que não se trata de coisa simples nem mesmo coisa simples de se definir. Podemos apenas *intuir a intuição* mas não defini-la precisamente. É de fundamental

²⁹ Dentre o amplo repertório de famosas frases de Einstein há uma na qual ele afirma que *A Imaginação é mais importante do que o Conhecimento*. É importante que se faça um estudo de organização e sistematização no sentido da criação de uma verdadeira *hermenêutica einsteiniana* o que, no nosso entender, ainda não existe, em que pese a enorme literatura sobre a obra e a vida de Einstein. Especificamente, no que concerne a essa bela frase, temos a convicção de que o que Einstein quis ressaltar é que nada pode substituir a faculdade *intuitiva* que dignifica a espécie humana. Não há nisso qualquer menosprezo pelo *conhecimento* (que tanto Einstein prezava) nem tampouco qualquer que seja o menosprezo pela *crítica*, expediente de essencial importância para a separação entre o joio e o trigo e que Einstein se utilizou de maneira tão extraordinária. Outras frases famosas suas como *‘Deus não joga Dados’*, *‘O Senhor é Sutil, mas não é Malicioso’* e muitas outras, foram ditas em contextos tão profundos que a atual, fragmentada e dogmática hermenêutica existente em amplos domínios da literatura ainda não faz jus à amplitude e à profundidade do pensamento einsteiniano.

importância que se assevera que, se por um lado, a intuição é um extraordinário e indispensável expediente para a exploração cognitiva, por outro lado, ela é incerta, constituindo-se verdadeiramente num salto no escuro. *Logo, podemos concluir que embora a intuição se constitua em algo essencial, ela deverá necessariamente ser combinada com outros expedientes principalmente aqueles que se referem ao rigor, à crítica e ao diálogo experimental com o mundo real.*

No que diz respeito à concepção dos formalistas de que a matemática seria um mero jogo de símbolos sem significados com que se joga com regras acordadas de antemão, diríamos que seria difícil de se conceber *regras de partida* completamente desvinculadas de alguma faculdade intuitiva que desse algum sentido a essas regras. Também seria difícil de se conceber tais regras de partida desvinculadas do mundo real, ou seja, da própria realidade. Ainda que se admita que informalmente haja alguma inspiração e que isso não atrapalharia o caráter formalista da concepção assumida pela escola de Hilbert, haveremos de convir que essa separação rígida entre o formalismo rigoroso e a informalidade é pouco convincente. E se for convincente, sem dúvida, a desconexão com o mundo real pode nos afastar seriamente de sua compreensão.

E aqui retornemos às questões que foram formuladas em caracteres itálicos no final na seção intitulada *Justificativa mais abrangente da proposta*. A primeira de tais questões levantadas é *se a matemática é descoberta ou se ela é inventada ou ainda se ela é parcialmente descoberta e inventada*.

Ora, Platão defendeu a tese radical segundo a qual a matemática (mais especificamente, a geometria) era descoberta. Segundo Platão, o conhecimento verdadeiro (*episteme*) existe no mundo das idéias antes mesmo de qualquer um de nós ter nascido. Para demonstrar essa tese radicalmente inatista (e até mesmo pré-inatista), Sócrates (personagem) interroga um escravo acerca do seguinte problema: *Qual é o lado do quadrado de área dupla?*

Platão pretende demonstrar que a solução verdadeira deste problema existe na alma imortal do escravo de Ménon, mas que no estágio de torpor cognitivo que o seu corpo lhe impõe o escravo responde incorretamente. Faz-se necessário aplicar a dialética da maiêutica (a arte da parteira) que consiste em *perguntar, mas não ensinar* para que sejam despertadas as dúvidas, as contradições, suas conseqüentes superações a fim de que o escravo chegue à resposta correta e enfim, contemple a verdadeira solução do problema que possuía antes mesmo de nascer. Esta é a *Teoria da Reminiscência* de Sócrates e Platão. O pré-requisito exigido por Sócrates e Platão segundo o qual *somente é permitido perguntar, mas jamais se deve ensinar* é de essencial importância para a demonstração da *teoria da reminiscência*. Isso porque a demonstração somente pode ser válida rigorosamente no caso em que seja absolutamente garantido que durante o processo dialético maiêutico consistindo de perguntas e respostas seja rigorosa e absolutamente constatado que *não se ensina coisa alguma, somente se pergunta*. Do contrário, não se poderia garantir que o conhecimento da solução exata do problema proposto já estivesse presente na alma imortal do escravo antes mesmo de que ele tivesse nascido. Em outras palavras, na ótica da concepção platônica e socrática do conhecimento é absolutamente imprescindível que se garanta que esse conhecimento concernente à solução exata do problema proposto não tivesse tido lugar exatamente durante o processo cognitivo de perguntas e respostas do método maiêutico.

Ao nosso ver, a fraqueza da bela demonstração platônica reside no fato de que essa garantia é absolutamente impossível de se dar. Durante o processo dialético de perguntas e

respostas há uma série de insinuações cognitivas onde os critérios *lógicos* e *intuitivos* desempenham um papel tão complexo no processo de aprendizagem que a linha demarcatória entre o que seja **inato**, por um lado, e o que seja **construído** durante o diálogo, por outro, é praticamente impossível de se estabelecer. Decerto que de **inato** há a propensão que quaisquer seres humanos têm a fim de que venham a adquirir tanto a linguagem quanto os conhecimentos geométricos. Muito provavelmente essa propensão inata está presente no nosso genoma. Agora, que a solução do problema já se encontre na alma do escravo antes mesmo de que esse tenha nascido, é uma coisa muito diferente e que ao nosso ver não se pode provar, pois a prova padece de um vício que é provavelmente insuperável.

Ora, a solução do problema *Qual é o lado do quadrado de área dupla?* é exatamente a seguinte: *O lado do quadrado de área dupla é a diagonal do quadrado de área simples.* No entanto, o escravo erra diversas vezes, sempre sofrendo as insinuações cognitivas de Sócrates (personagem do diálogo).

Numa primeira instância do diálogo, o escravo de Menon articula um raciocínio equivocado segundo o qual "se o lado de 2 pés gera um quadrado de área simples então o quadrado de área dupla seria gerado por um lado que fosse o dobro do primeiro". Esse raciocínio está errado; de fato o quadrado de 2 pés de lado gera um quadrado de 4 pés quadrados de área (área simples), porém o quadrado de 4 pés de lado gera um quadrado de 16 pés quadrados de área e, portanto, gera um quadrado de área quádrupla e não o quadrado de área dupla.

Numa segunda instância, o escravo conclui que se o lado de 2 pés gera o quadrado de área simples e o lado de 4 pés gera o quadrado de área quádrupla e sendo o dobro algo entre o simples e o quádruplo, então a resposta correta deve ser algo entre 2 e 4 pés. Aí ele infere (erroneamente) que algo que seja entre 2 e 4 pés deve ser necessariamente igual a 3 pés. Mas com o quadrado de 3 pés de lado ele constrói um quadrado de 9 pés quadrados de área e não o quadrado de área dupla que tem uma área de 8 pés quadrados.

Numa terceira instância e ajudado pelas insinuações cognitivas de Sócrates, o escravo constatará que a partir do quadrado de área quádrupla se pode desenhar um outro quadrado exatamente a partir dos 4 pontos médios de seus 4 lados e o novo quadrado daí resultante tem uma área que é exatamente igual a metade daquela do quadrado de área quádrupla, ou seja, este novo quadrado *é o próprio quadrado de área dupla.* *E o lado desse quadrado é a solução do problema que é exatamente a diagonal do quadrado de área simples.*

Nada nos garante que durante esse processo complexo de aprendizagem no qual se entrelaçam tão estreitamente *intuição, lógica, insinuações cognitivas, recursos visuais* (pois as figuras são desenhadas no chão) e *abstração*, tenhamos condições de dirimir sobre eventuais caracteres *inatos* ou *construtivistas* do conhecimento matemático e muito menos provar, tal como quiseram Platão e Sócrates, a *teoria da reminiscência*.

E aqui, tendo em vista o desenvolvimento de nosso tema acerca das Escolas de Pensamento da Matemática, é chegado o momento de articularmos o entrelaçamento do Ensino de Ciências com alguma coisa das Teorias da Aprendizagem e da Linguagem e com estudos de História e Filosofia das Ciências.

Ora, como vimos, Platão na sua *teoria da reminiscência* defende uma tese inatista radicalíssima que, a rigor, não pode ser provada, sem ambigüidades, pelas razões que acima

aludimos. Leibniz, por sua vez, por ocasião de sua troca de cartas com Clarke durante o período de 1715 a 1716, defendeu a tese segundo a qual a partir do *princípio da contradição* da lógica poderíamos construir toda a matemática (aritmética e geometria); o que se poderia inferir daí é que o *princípio da contradição* constituiria uma base inata que todo o ser humano que não padeça de um sério problema neurológico possua e que em cima do qual o conhecimento matemático é construído. Em suma, enquanto para Platão o conhecimento matemático perfeito já existe na esfera das idéias puras o qual é alcançável mediante a purificação dialética da maiêutica e que, portanto, *a matemática é descoberta*, para Leibniz, por sua vez, é em cima de princípios inatos (como o da contradição) que construímos a matemática, ou seja, a matemática é construída e portanto, *a matemática é inventada*, se bem que, é bom enfatizar, em cima de princípios e propensões inatas.

Lembremos que Leibniz escreveu os *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano* como uma réplica ao *Ensaio sobre O Entendimento Humano* de John Locke (1632-1704) ensaio este último que defendia a tese empirista da *tabula rasa*.

No prefácio aos *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano*, Leibniz escreve sobre essa base inata, a qual é totalmente negada pelos empiristas empedernidos. Leibniz escreve:

É desta forma que as idéias e as verdades estão inatas em nós: como inclinações, disposições, hábitos ou virtualidades naturais, e não como ações, embora tais virtualidades sejam sempre acompanhadas de algumas ações, muitas vezes insensíveis, que lhes correspondem. (LEIBNIZ, 1988a: 6; originalmente publicado em 1765).

A natureza do conhecimento, ou do entendimento humano, tem sido um tema recorrente em toda a história da filosofia ocidental. Na antigüidade grega, Platão e Aristóteles, por exemplo, adotaram posições divergentes entre si assim como Leibniz e Locke foram protagonistas de posições divergentes, Leibniz em defesa daquilo que convencionou-se denotar pelo *racionalismo continental* e Locke em defesa daquilo que se denota pelo guarda-chuva de *empirismo britânico*. Leibniz assim comenta as relações entre esses quatro personagens, sendo ele próprio um desses:

Com efeito, embora o autor do *Ensaio* [Locke] afirme uma infinidade de coisas belas, nas quais conta com o meu aplauso, os nossos sistemas diferem profundamente. O deles se relaciona mais com Aristóteles, o meu radica mais em Platão, embora ambos nos distanciemos em muitos pontos da doutrina desses dois autores antigos. (LEIBNIZ, 1988a: 3; originalmente publicado em 1765).

Não apenas na antigüidade grega e nos séculos XVII e XVIII essas questões fundamentais foram intensamente discutidas. Elas, como dissemos, são recorrentes e cada vez se aprofundam com novos desenvolvimentos em ordem crescente de dificuldade.

A propósito vejamos um debate avançado na última quarta parte do século XX envolvendo as teorias da Aprendizagem e da Linguagem e com ampla repercussão no Ensino de Ciências e na Filosofia da Ciência. Em outubro de 1975, teve lugar na Abadia de Royaumont, em Paris, um congresso em torno dos pensamentos de dois dos maiores autores das ciências cognitivas: Jean Piaget e Noam Chomsky. O foco central do congresso era o confronto e discussão entre o *inatismo* chomskyano consubstanciado pela sua *gramática humana universal* e o *construtivismo* piagetiano que explica as estruturas cognitivas humanas através do

desenvolvimento das atividades sensório-motoras da inteligência. Muitos cientistas participaram desses debates que propiciaram várias réplicas e tréplicas. Todo esse material foi organizado e comentado por Massimo Piatelli-Palmarini que o reuniu em abril de 1978 escrevendo um Prefácio, uma Introdução, além de vários comentários intercalados em vários dos capítulos. Piatelli-Palmarini –enquanto organizador– concebeu os debates à luz da concepção lakatosiana de programas de pesquisa o que sugere mais uma vez a proximidade de tudo o que se discutiu com a filosofia da ciência. Para dar uma idéia dessa proximidade e relação íntima vejamos como o congresso foi aberto. A intervenção que abriu o congresso foi a de Jean Piaget intitulada *A Psicogênese dos Conhecimentos e a sua Significação Epistemológica*. Ela começa assim:

Cinquenta anos de experiência fizeram-me saber que não existem conhecimentos resultantes de um registro simples de observações, sem uma estruturação devida às atividades do sujeito. Mas também não existem (no homem) estruturas cognitivas *a priori* ou inatas: só o funcionamento da inteligência é hereditário e só engendra estruturas por uma organização de ações sucessivas exercidas sobre objetos. Daqui resulta que uma epistemologia conforme com os dados da psicogênese não poderia ser nem empirista nem pré-formista, mas consiste apenas num construtivismo, com elaboração contínua de observações e de estruturas novas. O problema central é, então, compreender como se efetuam estas criações e porque, visto resultarem de construções não-predeterminadas, se podem tornar logicamente necessárias, durante o desenvolvimento. (PIAGET, In: PIATELLI-PALMARINI (ORG.), 1987: 51)

Piaget descarta vigorosamente o empirismo, mas atribui aos seres humanos uma base inata, talvez, relativamente modesta concernente apenas ao funcionamento da inteligência que, para ele, é hereditário. No entanto, segundo o seu parecer, as estruturas cognitivas são construídas e que, portanto, não existe pré-formismo. Um pouco mais adiante, Piaget procede a uma aproximação de sua teoria da psicogênese do conhecimento que consubstancia a sua epistemologia construtivista, comparando com o que acontece com a história da matemática. Piaget declara:

Reparemos que o problema é o mesmo na história das ciências: os períodos perfeitamente distintos da história das matemáticas resultam das criações por fases devidas aos matemáticos, ou constituem apenas a realização por tematizações progressivas do conjunto de todos os possíveis correspondendo então a um universo de idéias platônicas? Ora, o conjunto de todos os possíveis é uma noção antinômica como o conjunto de todos os conjuntos, porque o próprio "todos" não passa de um possível. E, mais, os trabalhos atuais mostram que, para além do número transfinito "kapa zero" (limite de predicatividade), manifestam-se ainda aberturas sobre novos possíveis, mas são efetivamente imprevisíveis porque se não podem basear numa combinatória. Ou então, as matemáticas fazem parte da natureza, e são então construções humanas, criadoras de novidades, ou então tem por fonte um universo supra-sensível e platônico de que se trataria de demonstrar, neste caso, por que meios psicológicos tomamos conhecimento dele, o que nunca pudemos indicar. (PIAGET, In: PIATELLI-PALMARINI, 1987:53)

Piaget aí identifica 'a realização por tematizações progressivas de todos os possíveis' como uma noção antinômica e aí baseia a sua crítica ao inatismo *à la* Platão. São simplesmente

impressionantes os pontos de semelhança desta citação com os argumentos de Poincaré já comentados neste trabalho e que constituem a sua crítica aos conjuntos infinitos. Aparece o infinito como ruptura de predicatividade, fonte de imprevisibilidade e gerador de antinomias. Para fugir dessa recorrente regressão ao infinito oferece uma alternativa que para Piaget é solução: as matemáticas fazem parte da natureza e são construções humanas. Um pouco mais adiante Piaget aduz o seguinte argumento contra o pré-formismo:

Se estas fossem preformadas, isso significaria, pois, que o bebê, ao nascer, já possuiria virtualmente tudo o que Galois, Cantor, Hilbert, Bourbaki ou MacLane puderam atualizar depois. E como o homenzinho é ele próprio uma resultante, seria preciso remontar aos protozoários e aos vírus para localizar o foco do "conjunto dos possíveis". (PIAGET, In: PIATELLI-PALMARINI, 1987: 53-54).

Agora vejamos algo do pensamento de Chomsky. O célebre lingüista na sua primeira intervenção no congresso intitulada *A propósito das estruturas cognitivas e do seu desenvolvimento: uma resposta a Piaget*, depois de cumprimentar Piaget por suas interessantes observações e dizer que Piaget classifica muito justamente as concepções de Chomsky como uma forma de inatismo, começa dizendo:

Precisamente, o estudo da linguagem humana levou-me a considerar que uma capacidade de linguagem geneticamente determinada, que é uma componente do espírito humano, especifica uma certa espécie de "gramáticas humanas acessíveis" (CHOMSKY, In: PIATELLI-PALMARINI (ORG.), 1987: 63)

E mais adiante, Chomsky escreve:

Como no caso dos órgãos físicos, não parece possível dar conta do caráter e da origem das estruturas mentais de base em termos de interação do organismo com o ambiente. Órgãos mentais e órgãos físicos são, tanto uns quanto os outros, determinados por propriedades próprias à espécie e geneticamente determinados, apesar de, nos dois casos, a interação com o ambiente ser necessária para desencadear o desenvolvimento, porque influi sobre as estruturas que se desenvolvem e as modela. (CHOMSKY, In: PIATELLI-PALMARINI (ORG.), 1987: 83)

De identidade com Piaget, Chomsky também adota uma vigorosa recusa do empirismo. No entanto, ao adotar que a linguagem humana é geneticamente determinada e que isso constitui um aspecto essencial do espírito humano, ele também adota uma base inata mais ampla do que aquela adotada por Piaget, este último reconhecendo como hereditário apenas o funcionamento da inteligência. Chomsky embora reconheça a importância do fenótipo, empresta um significado maior ao genótipo. Órgãos mentais e órgãos físicos são geneticamente determinados e embora requeiram a interação imprescindível com o ambiente a fim de que o desenvolvimento correspondente seja desencadeado, podemos dizer que a sua ênfase recai sobre um novo, interessantíssimo e original inatismo.

Vejamos agora um pouco da segunda questão que foi levantada em caracteres itálicos na seção *Justificativa mais abrangente da proposta*.

Essa questão é centrada no porquê da matemática cobrir tão bem a realidade física. Ela é profunda, pois não admite ser respondida de maneira simples e sem ambigüidades nem pelo inatismo platônico, segundo o qual a matemática é descoberta, nem pelas correntes que propugnam que as categorias precípua que nos fazer ter acesso à realidade através da matemática sejam de maneira precípua ou a *intuição*, ou a *lógica*, ou a *idéia de conjuntos* ou ainda o *formalismo distante de significados como mero jogo*.

Com o fito de mostrar a aproximação íntima dos temas histórico-epistemológicos com os temas das teorias da aprendizagem e da linguagem, e além disso relaciona-los com essa segunda questão, vejamos um excerto da resposta que Jean Piaget dá ao matemático René Thom acerca das relações da matemática com a realidade. Piaget assim se expressou:

Quanto ao espaço, Thom parte de uma alternativa que eu pretendo precisamente ter retirado: ou um espaço exterior físico, ou uma construção do sujeito. A minha resposta é, pelo contrário, que, se as matemáticas se adaptam à realidade, é porque o sujeito, nas suas fontes orgânicas, é um objeto físico-químico e espacial entre outros, e que, ao construir as suas estruturas cognitivas, parte, pois, das fontes neurológicas e biológicas cujas leis são as do real: é assim, por via sobretudo endógena, e não apenas exógena, que o espaço construído pelo sujeito concorda com o espaço exterior: portanto existem os dois sem conflito e convergentes sem se confundirem. (PIAGET, In: PIATELLI-PALMARINI (ORG), 1987: 497).

Todas essas articulações são enfáticas em apontar a necessidade de aproximação desses campos interdisciplinares no sentido da exploração das imensas *potencialidade* propiciadas. Não temos quaisquer dúvidas de que o aprofundamento no sentido de uma maior conscientização das naturezas dos conhecimentos físico e matemático se orientam decisivamente na melhoria dos ensinamentos de matemática e física que tanto carecem de abordagens transversais.

O trabalho presente enseja ao leitor que procure dar as suas próprias respostas para esses difíceis problemas. É um desafio para autonomia do pensamento. E para aqueles que desejam apenas se basear em autoridades que fique bem claro que essas autoridades não se entendem tanto assim sobre o assunto.

Lições para os ensinamentos de Física e de Matemática e repercussões em outros campos do conhecimento

O debate envolvendo algumas das características das escolas *logicista*, *intuicionista*, *formalista* e *conjuntista* da matemática é muito fértil o que se pode constatar ao se analisar apenas alguns de seus traços e aspectos. Deste debate emergem questões profundas, entre as quais: (i) as eventuais e possíveis relações das leis lógicas com as leis do pensamento, tal como houvera sugerido Boole já em 1854 a ponto de identificá-las como uma só coisa, o que foi criticado por Bertrand Russell em 1901 quando este último propôs *à la* Leibniz uma espécie de redução da matemática à lógica; (ii) a intensa polissemia do termo *intuição*, suas múltiplas acepções e o papel de seu estatuto em relação ao estatuto da lógica ou, em outras palavras, a emergência do importante problema epistemológico segundo o qual o que é que validaria as leis lógicas. Seriam as intuições corretas? Ou, inversamente, seriam justamente as leis lógicas que controlariam e disciplinariam as intuições corretas? Ou ainda, isso implicaria em um diálogo

complexo envolvendo uma espécie de causalidade de mão dupla entre lógica e intuição, diálogo esse modulado pelas conexões com o mundo real? Além disso haveria uma e só uma lógica ou, ao invés, vários sistemas lógicos poderiam ser considerados como igualmente legítimos? (iii) Seria a matemática um jogo simbólico carente de significado? (iv) Os fundamentos da teoria dos conjuntos podem ser considerados mais sólidos devido à sua conexão com a realidade? E a questão do infinito? E os conjuntos infinitos?

Como podemos ver todas essas são questões epistemológicas profundas e todas elas têm amplas repercussões para os ensinos de matemática e de física em quaisquer que sejam os níveis de escolaridade desde o ensino básico até a pós-graduação e a pesquisa.

Em toda essa discussão estão envolvidos conceitos complexos tais como as *naturezas da lógica*, do *pensamento*, da *intuição*, a questão da atribuição de *significado* aos entes matemáticos, as *conexões com a realidade*, etc.

Por exemplo, o programa de pesquisa dos formalistas radicais fala da matemática como um jogo simbólico sem significado com que se joga com regras acordadas de antemão pelos seus jogadores.

Mas como se exigir símbolos distantes do significado se justamente o simbólico – tanto na imaginação das pessoas individualmente quanto no imaginário dos povos – constitui-se em algo carregado de profundas significações?

E como se exigir distância entre o significado e as regras acordadas de antemão se essas próprias regras exigem uma *intuição a priori* capaz de permitir e ensejar a organização, a classificação e até mesmo a proposição delas próprias?

Sem alguma coisa *a priori* que permita uma organização mínima, como seria possível propor tais regras acordadas de antemão?

E como separar a formalidade da informalidade se informalmente se admite a inevitabilidade da “contaminação” do mundo real (realidade) tanto na formulação das regras acordadas de antemão quanto na própria atribuição de significado aos símbolos e às estruturas formais?

Vejamos que todas essas são questões que levantam muitas outras.

Ademais, como conciliar a concepção dos formalistas com o conceito de *aprendizagem significativa*?

Ora, segundo a conceituação de *aprendizagem significativa* (Moreira & Massini, 1982:7 ; Novak³⁰, 2000: 15-16) o que se considera como *o ingrediente mais importante a fim de que ela venha a ter lugar é, precisamente, aquilo que o aprendiz já sabe de antemão*. Isso porque uma vez de posse desse referencial teórico de partida tudo o que doravante a ele se referir, tanto

³⁰ “In his *The Psychology of Meaningful Verbal Learning* (1963) and later *Educational Psychology; A cognitive View* (1968, and in his forthcoming *The Acquisition and Retention of Knowledge*) Ausubel has made the clear distinction between *rote* learning where new knowledge is arbitrarily and non-substantively incorporated into cognitive structure (or we might say now, into long term memory, LTM), and *meaningful* learning where the learner chooses conscientiously to integrate new knowledge to knowledge that the learner already possesses.” (NOVAK 2000: 15-16).

corroborando quanto entrando em conflito com ele, é potencialmente gerador de novas e, possivelmente, de mais profundas significações.

A questão que daí pode ser posta é que a posição formalista empedernida é rigorosamente impossível uma vez que não há possibilidade alguma de regras acordadas de antemão gerarem jogos simbólicos sem significado uma vez que tais regras são necessariamente impregnadas de significação. O que elas podem gerar – e certamente geram – são níveis cada vez mais elevados de abstração, o que é coisa bem diferente de ausência de significação.

Como vimos também, o próprio Bertrand Russell que em 1901, ao tentar reduzir a matemática à lógica e argumentar em prol da primazia do estatuto lógico da matemática pura em detrimento do próprio estatuto ontológico que por acaso essa matemática viesse a descrever, teve que reconhecer em 1937, por ocasião de sua crítica aos formalistas, que esses últimos se afastavam do mundo real. Quem te viu, quem te vê! Diferentemente do Russell que em 1901 afastava a matemática pura da realidade, o de 1937 tenta explicar justamente as suas conexões. Poderíamos falar ainda em matemática pura ou a linha demarcatória entre a matemática pura e a matemática aplicada tornar-se-ia completamente superada?

Agora modifiquemos um pouco o nosso foco e perguntemos o seguinte:

Quais as repercussões para a Física e para o seu Ensino?

Ora, essas repercussões são várias e de diferentes teores.

Em primeiro lugar, pela razão de serem bastante íntimas as relações da matemática com a física. Não esqueçamos do importante fato histórico segundo o qual desde os tempos de Galileu e de Newton a física vem se tornando cada vez mais matemática. Esclareçamos melhor o que queremos dizer com isso. Sendo o conflito entre as quatro Escolas de Pensamento aludidas no curso deste trabalho algo que diz respeito tanto à natureza da pesquisa matemática quanto à natureza do conhecimento matemático e, ademais, tendo em vista o fato das leis físicas serem descritas em linguagem matemática em níveis crescentes de sofisticação, é de se supor que a discussão sobre eventuais primazias das categorias, respectivamente, *lógica*, *intuição*, *fórmula* e *conjunto* repercute, de alguma maneira, no seio da própria atividade dos físicos. Este, sem dúvida, é um problema muito íntimo da importante e complexa questão acerca das relações da matemática com a realidade, questão essa que fez parte das reflexões de pensadores seminais como Einstein e Wigner. Einstein, por exemplo, formulou a seguinte questão:

How can it be that mathematics being a product of human thought which is independent of experience, is so admirably appropriate to the objects of reality?
(EINSTEIN, 1983: 28) apud LINDLEY, 1993: 1) ³¹

O que parece intrigar Einstein é que se a matemática constitui-se numa livre criação do espírito humano independentemente da experiência, então poderia, em princípio, não haver elo algum desta com a realidade pois essa criação não precisaria recorrer à experiência para validar os seus resultados. Qual então seria a ponte que faria os objetos formais da matemática se adaptarem tão bem à realidade? A lógica? A intuição? O significado subjacente atribuído aos entes matemáticos? A idéia de conjunto?

³¹ “Como pode a matemática que é o produto do pensamento humano que é independente da experiência se adaptar assim tão admiravelmente à realidade?”

A despeito de identificações recíprocas evidentes, uma das diferenças mais marcantes entre a matemática e a física é que elas adotam critérios diversos de validação de seus resultados. Uma teoria física não pode dispensar o complexo diálogo com a experiência a fim de que venha a ser validada enquanto teoria científica que cobre certos aspectos da realidade. No entanto, a uma teoria matemática é permitida a postulação de premissas e a conseqüente obtenção de resultados por meio de inferências válidas sem que haja a necessidade, a fim de que venha a ser validada, de um diálogo com a experiência, pelo menos no mesmo nível em que a física requer. O critério que vem à mente mais comumente para a validação das teorias matemáticas é o da consistência interna (ausência de contradições). O Programa Hilbertiano pode, em certo sentido, ser considerado como uma exacerbação deste critério.

A crescente complexidade da matemática com a qual as teorias físicas são formuladas tornou muito sutil a procura de suas pontes possíveis com a realidade. Um dos exemplos emblemáticos é a introdução do número complexo na física (complexo aqui no sentido matemático da forma $\mathbf{a} + \mathbf{i}\mathbf{b}$, onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são quantidades reais no sentido matemático e $\mathbf{i} = (-1)^{1/2}$). Este é um exemplo que mostra que, cada vez mais são suscitados graus de abstração e de intuição crescentemente mais complexos.

Em segundo lugar, pela grande mudança ocorrida a partir da primeira metade do século XIX, época essa em que a matemática ainda era tida como um corpo de verdades eternas. No seu estupendo livro, Kline (1980) argumenta que três fatos podem ser eleitos como entre os mais relevantes para o advento daquilo que ele denominou de *Perda da Certeza*. O primeiro desses fatos foi o advento das Geometrias Não-Euclidianas na primeira metade do século XIX. Desaparecia a correspondência obrigatória em nível ontológico entre a geometria e a realidade. Foram inventadas geometrias outras tão legítimas e consistentes quanto a geometria euclidiana e que cobriam o real tão bem quanto essa última. O segundo desses fatos foi o aparecimento das antinomias no seio da teoria dos conjuntos que levavam a situações paradoxais e contraditórias como o famoso paradoxo de Russell de 1903. O terceiro foi o famoso teorema de Gödel de 1931 que estabelecia a inevitabilidade de proposições indecidíveis em estruturas cuja base axiomática contivesse a aritmética. O chão parecia desaparecer dos pés dos matemáticos.

Para dar um exemplo de repercussão que isso causou para todas as correntes e escolas de pensamento da matemática, tomemos a escola formalista. O programa de Hilbert de consistência absoluta (não o de consistência relativa) de toda a matemática deparou-se com barreiras intransponíveis e, rigorosamente, desabou.

Em relação à Física ocorreu algo de alguma maneira semelhante. Com os adventos da teoria da relatividade restrita (1905) e da nova mecânica quântica (1927) as antigas abstrações e intuições tiveram que dar lugar a outras abstrações e intuições em níveis crescentemente mais sutis e complexos. Tal fato chegou mesmo a acarretar, no nosso entender, exageros e tomadas de posição que não tiveram boas repercussões no Ensino de Física, na Educação, e, de modo geral, na Concepção de Mundo que isso implicava. Quanto à velha mecânica quântica do período de 1900-1924, as intuições e abstrações se apresentavam – em larga medida – ainda compatíveis com as assim chamadas intuições clássicas (às vezes até mesmo denominadas de intuições do senso comum). No entanto, no período de 1924-1927, a nova teoria quântica conheceu uma enorme complexidade e, como conseqüência disso o nível das abstrações e intuições correspondentes cresceu sobremaneira.

Apareceram questões difíceis que, em larga medida ainda persistem, como: (i) Será a função ψ , solução da equação de Schrödinger, um campo real (no sentido ontológico) ou

apenas uma amplitude de probabilidade matemática?; (ii) Por que a função ψ , é em geral, uma quantidade complexa? (complexo aqui no sentido matemático da forma $\mathbf{a} + i\mathbf{b}$, onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são quantidades reais no sentido matemático e $i = (-1)^{1/2}$); (iii) As relações de Heisenberg constituem-se em limitações ao conhecimento ou são apenas relações de dispersão? (iv) A real compreensão do experimento da dupla fenda requereria uma lógica não-clássica onde não mais valeria o princípio do terceiro excluído? E porque a concepção dualista de De Broglie e de Einstein não requer nada disso? (v) Haveria algum paralelo entre a indecidibilidade presente no teorema de Gödel e supostas indecidibilidades, por exemplo, como aquelas que estariam presentes no experimento da dupla fenda?

Para essas questões complexas, diferentes escolas de pensamento da física deram respostas diversas e que ainda hoje são polêmicas. Por razão de espaço, isso não poderá ser tratado aqui. Enfatizamos contudo, que isso se dava num grande consenso sobre as fórmulas da teoria e um completo dissenso quanto às suas interpretações. Argumentamos, de maneira enfática, que aqui emergem, com todas as letras, os problemas da *intuição*, da *compreensão*, do *significado* e da *realidade* o que mostra a proximidade das duas polêmicas tanto no seio da comunidade dos matemáticos quanto no seio da comunidade dos físicos, haja vista também diferenças e peculiaridades notáveis em cada uma dessas comunidades.

Queremos enfatizar os exageros motivados por físicos famosos brilhantes que seguiram Bohr e o seu Princípio da Complementaridade. Esses físicos introduziram um pessimismo cognitivo (e até instrumentalista) que não se constitui em um bom exemplo nem para o Ensino estrito de Física nem, muito menos para a Educação Científica e Cultural como um todo. Por exemplo, Feynman assim se expressou:

...Por outro lado que posso dizer, sem me enganar, que ninguém compreende mecânica quântica. ...Se puderem evitem ficar a questionar “como é que pode ser assim?” porque ficarão num beco do qual ainda ninguém saiu. Ninguém sabe por que é que as coisas são assim. (FEYNMAN, 1989: 166)³²

E em outro de seus livros, Feynman insiste no mesmo argumento:

O meu trabalho é convencê-los a não virarem as costas só porque não entendem [a teoria quântica]. É que os meus estudantes de física também não percebem. Eu também não. Ninguém percebe. (FEYNMAN, 1988: 26)³³

E mais adiante, e ainda mais radicalmente:

A teoria da eletrodinâmica quântica descreve a Natureza como absurda do ponto de vista do senso comum. E está completamente de acordo com a experiência. Espero, portanto, que aceitem a Natureza como Ela é absurda. (FEYNMAN, 1988: 27)

³² O texto correspondente de Feynman foi tirado do capítulo VI (pp. 163-189) de seu livro ‘O que é uma lei física?’, Gradiva, Lisboa.

³³ O texto correspondente de Feynman foi tirado de seu livro ‘QED A Estranha Teoria da Luz e da Matéria’, Gradiva, Lisboa.

As três citações acima de Feynman são representativas de um pessimismo cognitivo, tanto combatido por Einstein, Popper, de Broglie, Schrödinger, Ehrenfest e muitos outros. Esse pessimismo parte do princípio segundo o qual não adianta entender a mecânica quântica (Feynman, na verdade, segue Bohr), bastaria instrumentalizá-la. Na última citação de Feynman, a coisa chega ao cúmulo de se proceder a uma apologia do absurdo. Mas isso é completamente falso pois se a Natureza fosse de fato absurda, o próprio Feynman, um dos brilhantes criadores da eletrodinâmica quântica, jamais poderia ter encontrado regularidades que pusessem conduzi-lo a uma teoria significativa sobre a própria Natureza. O que acontece não é que a Natureza seja absurda e sim que as abstrações e intuições se tornaram de tal maneira complexas que passaram a exigir esforços adicionais para a genuína compreensão de suas regularidades. Preferimos adotar a posição de otimismo cognitivo de Einstein para quem a coisa mais incompreensível do mundo é que ele é compreensível. Essa adoção é muito mais adequada aos verdadeiros objetivos da genuína educação.

A fim de mostrar como as idéias pessimistas de incompreensibilidade da mecânica quântica ultrapassaram o domínio da física e da matemática, finalizaremos esta seção com uma citação representativa e emblemática de um dos maiores lingüistas do século XX acompanhada de um breve comentário nosso sobre o argumento. Chomsky, como sabemos, é um dos intelectuais hodiernos de posições políticas das mais íntegras e independentes. Vejamos, pois, como ele se refere à mecânica quântica:

Suponho que esta questão de virtude faça parte de nossa natureza, mas de uma forma tão transparente que não podemos chamá-la de teoria. Todos sabem a partir da própria experiência, praticamente tudo o que já se estudou sobre os seres humanos – como agem e por que – se pararem para pensar. Não se trata de física quântica. CHOMSKY, 199: 114)³⁴

Chomsky compara aqui as intuições que todas as pessoas que voltaram a cabeça para pensar sobre os assuntos humanos podem ter por experiência própria com aquelas intuições ensejadas pela mecânica quântica. Ora, a mecânica quântica realmente enseja níveis de abstração e intuição que requerem estudo específico aprofundado enquanto não é assim para temas que são afetos a todas as pessoas como a *virtude* e a *natureza humana*. Em outras palavras, é possível interpretar Chomsky dizendo que, diferentemente do que ocorreria no caso da mecânica quântica, as características *demens* e *sapiens* da espécie humana seriam coisas compreendidas e sentidas por todos.

Conclusões

Ao procedermos a um relato sobre alguns traços do complexo debate entre as escolas de matemática, ocorrido principalmente na primeira metade do século XX e com ampla repercussão tanto para o desenvolvimento ulterior da matemática e das ciências empíricas bem como para amplos setores do conhecimento, tivemos em mente extrair daí conseqüências para os Ensinos da Matemática e da Física. Algum paralelo entre o debate no interior da matemática e o debate no interior da física (principalmente quanto à interpretação da teoria quântica) foi

³⁴ O texto de Chomsky foi tirado do capítulo 'A Natureza Humana e Auto-Imagem' (pp.111-117) e precisamente da página 114 do livro 'A Minoria Próspera e a Multidão Inquieta', Ed Universidade de Brasília, 1999.

explorado com o objetivo de estudar aspectos de sua imensa fertilidade. Chegamos à conclusão de que, o debate propriamente dito bem como os paralelos acima aludidos e discutidos, são muito férteis e capazes de ensejar discussões várias acerca de categorias conceituais chaves como *a intuição*, *a natureza da lógica*, *inevitabilidade ou não de uma suposta exclusividade da lógica clássica*, o *significado* atribuídos aos entes físicos e matemáticos e muitos outros. Possibilitam, outrossim, refletir sobre o difícil tema acerca das relações entre a matemática e a realidade.

As conseqüências para os Ensinos de Física e de Matemática são íntimas das conseqüências para a Filosofia da Ciência posto que os temas cognitivos (e portanto epistemológicos) estão intrinsecamente conectados com os temas da aprendizagem, notadamente da assim chamada *aprendizagem significativa*. Somos enfim chegados à conclusão segundo a qual os estudos históricos e filosóficos de uma disciplina orientam sobremaneira o seu ensino.

Agradecimentos

Agradecemos aos dois árbitros pelas críticas e sugestões feitas ao nosso trabalho.

Referências

- BOYER, C. B., 1990, *Storia della Matematica*, Oscar Saggi Mondadori, Milão, Itália.
- CARAÇA, B. J., 1984, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Livraria Sá da Costa Editora, Lisboa, Portugal.
- CHOMSKY, N., 1999, *A Minoria Próspera e a Multidão Inquieta*, Editora da Universidade de Brasília (tradução de Mary Grace Fighiera Perpétuo).
- DA COSTA, N. C. A. , 1980, *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*, Ed. Hucitec, Editora da Universidade de São Paulo.
- DA COSTA, N. C. A. , 1997, *O Conhecimento Científico*, Discurso Editorial, São Paulo.
- EINSTEIN, A., 1883, *Sidelights on Relativity*, Dover, New York
- EINSTEIN, A., 1993, *Letters to Solovine 1906-1955*, Citadel Press, New York.
- FEYNMAN, R. P., 1988, *QED. A Estranha Teoria da Luz e da Matéria*, [originalmente publicado em inglês em 1985], Gradiva, Lisboa (tradução de Ana Maria Ovídio Baptista)
- FEYNMAN, R. P., 1989, *O que é uma Lei Física?* [originalmente publicado em 1965], Gradiva, Lisboa, (tradução de Carlos Fiolhais).
- HOLTON, G., 1979, *A Imaginação Científica*, Zahar Editores, Rio de Janeiro.

- KANT, I., 1987, *A Crítica da Razão Pura*, [a 2ª ed. é de 1787; a 1ª é de 1781] In: Kant, Vol. I., Coleção 'Os Pensadores', Nova Cultural, São Paulo (tradução a partir da segunda edição a cargo de Valério Rohden e Udo Baldur Moosburger)
- KLINE, M., 1980, *Mathematics. The Loss of Certainty*, Oxford University Press, Oxford, New York.
- LEIBNIZ, G. W., 1988a, *Novos Ensaio sobre o Entendimento Humano*, [originalmente publicado em 1765], In: Leibniz, Vols I e II , Coleção 'Os Pensadores', Nova Cultural São Paulo (tradução de Luiz João Baraúna)
- LEIBNIZ, G. W., 1988b, *Correspondência com Clarke*, [originalmente publicada em 1717] In: Leibniz Vol. II, Coleção 'Os Pensadores', Nova Cultural, São Paulo, pp. 233-298 (tradução de Carlos Lopes de Mattos)
- LEIBNIZ, G. W & CLAKE, S., 1956, *The Leibniz-Clarke Correspondence*, [originalmente publicada em 1717], ALEXANDER, H. G. (ORG.), Manchester University Press, Barnes & Noble, New York.
- LINDLEY, D., 1993, *The End of Physics (The Mith of a Unified Theory)*, Basic Books, A Division of Harper Collins Publishers, New York
- MATES, B., 1986, *The Philosophy of Leibniz. Metaphysics and Language*, Oxford University Press, New York, Oxford.
- MOREIRA, M. A. & MASSINI, E. S. F., 1982, 'Aprendizagem Significativa: A Teoria de David Ausubel', Moraes, São Paulo.
- NOVAK. J. D., 2000, 'Meaningful Learning: The Essential Factor for Conceptual Change in Limited or Inappropriate Propositional Hierarchies (LIPHs) Leading to Empowerment of Learners.', *Proceeding of the III International Meeting in Meaningful Learning*, Peniche, Portugal.
- PEIRCE, C. S., 1989, *Escritos Coligidos*, In: Vol. Peirce/Frege, Coleção 'Os Pensadores', Nova Cultural, São Paulo (seleção de Armando Mora d'Oliveira e tradução de Armando Mora d'Oliveira e Sérgio Pomerangblum).
- PIAGET, J. e CHOMSKY, N., 1987, *Piaget e Chomsky debatem Teorias da Linguagem e Teorias da Aprendizagem*, PIATELLI-PALMARINI (ORG.), Edições 70, Lisboa, Portugal (tradução de Rui Pacheco).
- POINCARÉ, H., 1924, *Últimos Pensamentos*, [originalmente publicado em 1913] Livraria Garnier, Rio de Janeiro, Paris
- POINCARÉ, H., 1970, *La Valeur de la Science* [originalmente publicado em 1905], Flammarion, Paris
- POPPER, K. R., 1982, *Conjecturas e Refutações*, [originalmente publicado em 1963] Editora da Universidade de Brasília, Brasília, D. F., Brasil (tradução de Sérgio Bath)

POPPER, K. R., 1989, *Conjectures and Refutations*, [originalmente publicado em 1963] Routledge, Londres e Nova Iorque, quinta edição revista e reimpressa em 1991 e em 1992.

RUSSELL, B., 1965, ‘The Study of Mathematics’ In: *The New Treasury of Science*, H. Shapley, Samuel Rapport and Helen Wright, Harper & Row Publishers, New York, pp. 48-50.

STRUIK, D. J., 1992, *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, Lisboa, Portugal (2ª edição)

WEIL, A. 1950, ‘The Future of Mathematics’, *American Mathematical Monthly*, pp. 295-306. Ver, em particular, a página 297.

Recebido em: 13.12.2002

Aceito em: 23.04.2003